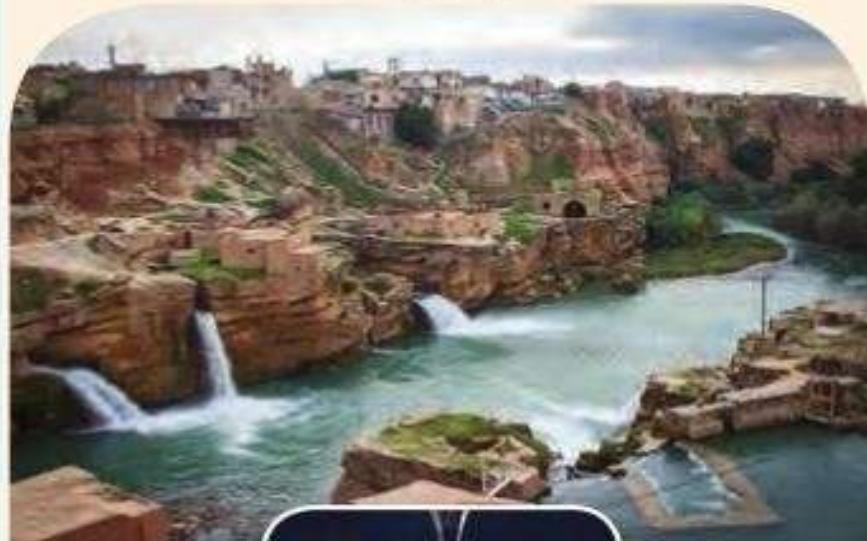




۲
شل

توان و ریشه

و جعلنا من آباء، كل شئ و حق
هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آورده‌یم
(سوره آنبا، آیه ۳۰)



یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر
۳۳،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰ مولکول است که می‌توان آن را به صورت 1×10^{23} نمایش داد. هرگونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این تعداد مولکول را بدانیم.

درس اول: توان صحیح

در سال های گذشته با توان های طبیعی یک عدد آشنا شده اید؛ به طور مثال می دانید :

$$2^3 = 8 \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{-1}{32}$$

همچنین می دانید که اگر a عددی غیر صفر باشد، $a^0 = 1$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصف) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل 2^{-3} چیست؟ به کمک فعالیت زیر پاسخ این سؤال را می توان پیدا کرد :

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}

$$14 \div 2 = 8$$

- (الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارد؟ هر عدد مضف عدد قبلی است
 (ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه ای با عدد بالای آن دارد؟ بآسانی برایم است
 (ج) توان های عددهای سطر دوم تا 2^0 با یکدیگر چه رابطه ای دارد؟ در مرحله کم و کم از زمان n سود
 (د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید. پشم
 (ه) به کمک جدول، تساوی های زیر را کامل کنید :

$$2^{-3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \quad 2^{-4} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} \quad 2^{-5} = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$$

به طور کلی اگر a یک عدد غیر صفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

توضیح هایم

مثال :

$$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$(ج) \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$$

$$(ب) \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{125}} = 125$$

$$(د) (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in N$$

اگر n یک عدد صحیح ممکن باشد آن‌ها n -یک عدد طبیعی است

$$5^{-(-2)} = 25 \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-(-2)} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

مثال

نته: چرا n نمی‌تواند یک عدد کوچکی مسنت باشد

$$(-5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(-5)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-5}} \notin R$$

مثال

در مجموعی اعداد حقیقی حوا ندارد

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \frac{a}{b} \neq 0, b \neq 0, m \in N$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

مثال

DonyaLia..ir

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان داریم بود

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$\frac{2^{-5} \times 3^3}{2^3 \times 3^{-1}} = \frac{\frac{1}{2^5} \times 3^3}{2^3 \times \frac{1}{3^1}} = \frac{\frac{3^3}{2^5}}{\frac{2^3}{3^1}} = \frac{3^2 \times 3^1}{2^3 \times 2^3} = \frac{3^{10}}{2^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

کار در کلاس

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان دار با توان

طبیعی بنویسید:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

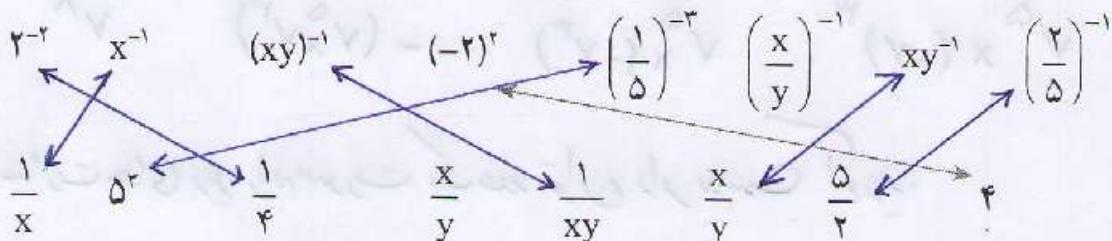
$$(ب) \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$(ج) (-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = \frac{1}{-216} = \left(-\frac{1}{6}\right)^3$$

$$(د) \left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{7}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{49}} = \frac{49}{16} = \frac{2401}{14^2} = \left(\frac{7}{2}\right)^4 = \left(-\frac{7}{2}\right)^4$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \text{به طور کلی اگر } n \text{ یک عدد طبیعی و } a \neq 0 \text{ آن‌گاه:}$$

۲- عبارت‌های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید:



۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

$$(الف) \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = 3^4 = 81 \quad (و) 1^{-2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$(ب) \frac{2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1}}{13} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{13} = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$(ج) -(-5)^3 = -\frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{-125} = 125$$

$$(د) -\frac{1}{2^{-2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2^2}} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

$$(ه) -(-5)^{-2} = -\frac{1}{(-5)^2} = -\frac{1}{25}$$

$$(ط) \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{4}{25} = \frac{625}{100} = \frac{625}{100}$$

$$(ز) -5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$$

$$(ای) 2^{-2-1} = 1 - \frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

نکته: اگر عدد ممکن نباشد فرد برسد حاصل عددی صفر است و اگر عدد ممکن نباشد روح برسد حاصل عددی مشتب است

$$(-a)^{2k} = a^{2k}, \quad (-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}, \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

* در صورتی که $a=0$ باشد توان نباید صفر باشد
مثال:

حاصل عبارات زیر را به صورت مکعب عدد توان دار نویسید.

$$(-\omega)^8 \times \omega^21 = \omega^8 \times \omega^{21} = \omega^{29}$$

$$\frac{(-3)^{11} \times (-3)^8}{2^4 \times (-2)^{12}} = \frac{(-3)^{18}}{2^4 \times 2^{12}} = \frac{3^{18}}{2^{18}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{18}$$

$$\frac{(-v)^{13} \times v^4}{v^5 \times (-v)^3} = \frac{-v^{13} \times v^4}{v^5 \times (-v^3)} = \frac{-v^{17}}{-(v^5 \times v^3)} = + \frac{v^{14}}{v^8} = v^9$$

حاصل عبارت های زیر را به صورت مکعب عدد توان دار نویسید آورید.

الف) $10^{\omega} \div 2^{-\omega} = 10^{\omega} \div \frac{1}{2^{\omega}} = 10^{\omega} \times 2^{\omega} = 20^{\omega}$

$$a^m \div b^{-m} = a^m \times b^m = (ab)^m$$

شنبه:

ب) $\frac{2^{\omega} \div 2^{-4}}{2^{-3} \div 2^{-4}} = \frac{2^{\omega} \times 2^{-4}}{2^{-4} \times 2^{\omega}} = \frac{2^{\omega}}{2^{\omega}} = 2^0$

ج) $\frac{v^{-2} \div v^{-4}}{v^{-4} \times v^4} = \frac{v^{-2} \times v^4}{v^{-4} \times v^4} = \frac{v^2 \times v^4}{v^4 \times v^4} = \frac{v^6}{v^8} = \left(\frac{v^3}{v^4}\right)^{\omega}$

اگر m و n دو عدد طبیعی، و a یک عدد دلخواه باشد، داریم: $a^m \times a^n = a^{m+n}$
آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟
با فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای عده‌های صحیح هم حدس زد.

فعالیت

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابله را نیز به همین روش بدست آورید:
 $5^2 \times 5^{-7} = \dots 5^{-4}$

در حالت کلی اگر m و n دو عدد صحیح باشد و a یک عدد دلخواه (غیر صفر)، رابطه

زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

صفحه ۴۲۱

مثال:

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-4} = 2^{3-5-4} = 2^{-6}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^4) \times (4x^3) = 24x^{-1+4+3} = 24x^6 \quad (x \neq 0)$$

کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید:

$$5^{-7} \times 5^1 = \textcircled{5} \quad (-4)^{-10} = (-4)^{-1} \times (-4)^{-1} = (-4)^{-10} = 4^{-10} = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} = \left(-\frac{3}{8}\right)^{-5} = \left(-\frac{1}{8}\right)^5 \quad (\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^{-2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$b^{-r} \times b^{-r} = b^{-\textcircled{8}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\textcircled{8}}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-v} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

$$\alpha^m \times \alpha^n = \alpha^{m+n}$$

چرا m و n باید عدد صحیح باشد

$$(-\infty)^{\frac{1}{r}} \times (-\infty)^{\frac{1}{r}} = (-\infty)^{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} = (-\infty)^{\frac{2}{r}} = -\infty \quad \text{مثال ۱:}$$

$$(-\infty)^{\frac{1}{r}} \times (-\infty)^{\frac{1}{r}} = \sqrt{-\infty} \times \sqrt{-\infty} \quad \sqrt{-\infty} \notin \mathbb{R}$$

$$(-\infty)^{\frac{1}{r}} \times (-\infty)^{\frac{1}{r}} = (-\infty \times -\infty)^{\frac{1}{r}} = \infty^{\frac{1}{r}} = \sqrt{\infty} = \infty$$

اگر m و n متعلق به اعداد صحیح نباشند نمی توانیم از این رستور استفاده کنیم

$$(-3)^{\frac{1}{2}} \times (-3)^{\frac{3}{2}} = (-3)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = (-3)^{\frac{4}{2}} = (-3)^2 = 9 \quad \text{مثال ۲:}$$

در صورتی که در مجموعی اعداد حقیقی تعریف نشده است

حاصل عبارت های زیر را به صورت تک عدد توان دار نویسید.

$$(-v)^{12} \times (-v)^4 \times (-v)^5 = (-v)^{12+4+5} = (-v)^{21}$$

$$(-\frac{v}{3})^9 \times (-\frac{v}{3})^4 = (-\frac{v}{3})^{10} = (\frac{v}{3})^{10} = v^{10}/3^{10}$$

$$(-1\frac{v}{8})^v \times (-\frac{v}{8})^v \times (-1/v)^{12} = (-1/v)^{v+v+12} = (-1/v)^{24} = 1/v^{24}$$

$$(\alpha^m)^n = \alpha^{mn}, \quad \alpha \neq 0, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left((-4)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{2 \times \frac{1}{2}} = (-4)^1 = -4 \quad \text{چرا } m \text{ و } n \text{ باید عدد صحیح باشد}$$

(پا استفاده از رستور مثال)

$$((-4)^2)^{\frac{1}{2}} = (4^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4^2} = 4 \quad \checkmark$$

اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشد، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n} ; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} ; \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ;$$

$$(a^m)^n = a^{mn} ; (ab)^m = a^m \cdot b^m ; \quad a^0 = 1$$

کار در کلاس

(الف) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[5]{5}} = \sqrt[3-5]{2-5} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^2}$ (ب) $2^{-3} \times 5^{-1} = (2 \times 5)^{-3-1} = 10^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$

(ج) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times 12^{-3} = \left(-\frac{2}{3} \times 12\right)^{-3} = (-8)^{-3} \quad (\text{د}) \left[\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{(-2) \times (-1)} = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2$
 $= \left(-\frac{1}{8}\right)^3$

(ه) $\frac{2^8 \times 5^1}{2^4 \times 5^6} = \frac{2^8}{2^4} \times \frac{5^1}{5^6} = 2^4 \times 5^{-5} = 10^{-1}$

(و) $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^2} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-2} = x^7 y^{-5} z^{-1} \quad x, y, z \neq 0$
 $= \frac{x^7}{y^5 z^2}$

Donatia.iR

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \quad 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} \quad 3^{-1} \times 4^{-1} = \frac{1}{3^1} \times \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12^1} = 12^{-1}$$

الف) $3^{-1} < -6$ ✓

ب) $3^{-1} < -\frac{1}{3}$ ✓

ج) $3^{-1} \times 4^{-1} < 12^{-1}$ ✓

د) $3^{-1} + 4^{-1} < -7^{-1}$ ✓

ه) $5^{-2} < \frac{1}{25}$ ✓

و) $(-2)^3 < -8$ ✓

ز) $3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

حاصل عبارت های زیر را بدستور عدد توان داریم بفرمودیم

$$\left[12^9 \div \left(\frac{4}{3} \right)^9 \right] \div 2^9 = \left(12 \times \frac{4}{3} \right)^9 \div 2^9 = 18^9 \div 2^9 = 9^9$$

$$\frac{(12^V \times 2^V) \div 2^{V^2}}{(2^V \div 2^{V^2}) \times 2^{V^3}} = \frac{2^{V^2} \div 2^{V^2}}{1^V \times 2^V} = \frac{2^{V^2}}{2^{V^2}} = 2^V$$

$$2^V \times 2^V \times 1^V \times 2^V = (2^V \times 1^V) \times (2^V \times 2^V) = 2^V \times 2^V = 2^V$$

$$\frac{1V^{10} \times 10^{10}}{10^V \times 1V^A} = \frac{1V^{10} \times 10^{10}}{1V^A \times 10^V} = \frac{1V^{10}}{1V^A} \times \frac{10^{10}}{10^V} = 1V \times 10^{-V} = \frac{1V^V}{1} \times \frac{1}{10^V}$$

$$= \frac{1V^V}{10^V} = \left(\frac{1V}{10} \right)^V$$

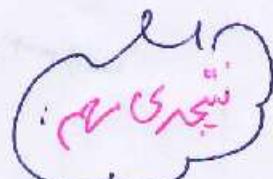
$$\text{رسونه} \quad \frac{1V^V \times 10^{10}}{10^V + 10^V \times 1V^A} = \frac{1V^V}{10^V} = \left(\frac{1V}{10} \right)^V$$

حاصل هر عبارت را بدستور آورید

$$(0.1000)^{-4} = \frac{1}{(0.1000)^4} = \frac{1}{\left(\frac{100}{1000}\right)^4} = \left(\frac{1}{\frac{100}{1000}}\right)^4 = 10^4 = 10,000$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0.0001$$

توان سمع از اعداد کوچک نسبت اعداد بزرگ سازد و از اعداد بزرگ
نسبت اعداد بزرگ بین ادو صفر تولید می کند



اگر $2^a = 10$ باشد حاصل عبارات زیر را بدستور آورید

$$\text{(الف)} \quad 2^{a+3} = 2^a \times 2^3 = 10 \times 8 = 80 \quad \text{(ب)} \quad 2^{a-1} = \frac{2^a}{2^1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$100 \text{ Kg} = 100 \times 1000 \text{ g} = 10 \times 10^3 = 10^5 \text{ کرم}$$

$$\frac{10^5}{10^{-24}} = 10^{5-(-24)} = 10^{5+24} = 10^{29}$$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود 10^{-24} گرم است. جرم یک وزنه 100 کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

۳- عدهای 16^3 و 8^4 و 2^{11} را با یکدیگر مقایسه کنید. صفحه ۴۱

۴- در جاهای خالی علامت $>$, $<$ یا $=$ قرار دهید:

۵- $\frac{1}{3} > \frac{1}{9}$ (الف)

۶- $\frac{1}{42} > 1$ (ب)

۷- $\frac{1}{15} < 1$ (ج)

۸- $\left(\frac{-8}{10}\right) \neq 1$ (د)

۹- $\frac{1}{5} > 0$

۱۰- $5^x \times 5^{-x} = 5^0$ (الف)

۱۱- $5^x \div 5^{-x} = 5^x$ (ب)

۱۲- $x - (-3) = 4$ (ج)

۱۳- $x - (-3) = 1$ (د)

۱۴- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

۱۵- $a^4 \times a^5 = a^{10}$ (الف نادرست)

۱۶- $1 + 3 = 4$ (درست) (ب)

۱۷- $a^4 \times a^5 = a^1$ (ب نادرست)

۱۸- $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-1}$ (و)

۱۹- $(a^m)^n = (a^n)^m$ (ج درست) (د نادرست)

۲۰- $a > 0$ (ز)

۲۱- $3^{-1} = -9$ (د نادرست)

۲۲- $3^{-1} < 3^{-2}$ (ح)

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید. صفحه ۴۱

۲۳- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times 27^{-3} = 3^{10}$ (الف)

۲۴- $0^0 \times 25^{-4} = 0$ (ب)

۲۵- $\left(\frac{15}{14}\right)^{-4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^4$ (ج)

۲۶- -5^{-2} (د)

۸- عدهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۲۷- 2^{-3} و 1^{-1} و 16^{-1} و -7^3 و 2^2 و 5^{-3} و -2^{-4}

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

۱۰- $(0/987)^{10} < 1^0$ (درست) (ب) $(1/2)^7 < (1/02)^7$ (نادرست) (ج) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 > (0/75)^3$ (نادرست) (د) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 < (0/75)^3$

۱۱- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱۲- $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}$ (الف)

۱۳- $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-1} = \left(-\frac{9}{4}\right)^{-1} = -\frac{4}{9}$ (ب)

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3}{-\left(2^0 \times 2^{-8}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{8}\right)^3}{-2^{-3}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{-2^{-3}} = -2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = -\left(2 \times \frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{4}$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\lambda = (r^m)^k = r^{mk}, \quad 19^r = (r^k)^m = r^{km} \Rightarrow r^m < \lambda = 19^m$$

۴- به صورتی همی توانیم اعداد کنیم $(a^m)^n = (a^n)^m$

$$((-3)^{\frac{1}{3}})^2 \neq ((-3)^2)^{\frac{1}{3}}$$

طرف اول (سمت چپ) در مجموعی اعداد حقیقی تعریف نشود است
 $(-3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{-3} \notin R$

زیرا عدد ۳- در مجموع اعداد حقیقی رسمی دو ندارد

$$((-3)^2)^{\frac{1}{3}} = (+9)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9} = 3$$

و سمت راست برابر ۳- می شود

$$((-3)^{\frac{1}{3}})^2 = -3$$

حاصل سمت چپ برابر ۳- می شود

لذت

در مثالهای آینده علت این حاصل برابر ۳- می شود را می خواهید

$$\text{الف) } (\frac{1}{3})^{-10} \times 27^{-3} = 3^{10} \times (3^3)^{-3} = 3^{10} \times 3^{-9} = 3^1 = 3$$

$$\text{ب) } (0.2)^{-4} \times 25^{-2} = (\frac{1}{5})^{-4} \times (\frac{1}{20})^2 = (\frac{1}{5})^4 \times (\frac{1}{20})^2 = (0 \times \frac{1}{20})^4 = 1^4 = 1$$

$$\text{ج) } (\frac{1}{10})^{-4} \times (\frac{1}{20})^4 = (\frac{1}{10})^4 \times (\frac{1}{20})^4 = (\frac{1}{10} \times \frac{1}{20})^4 = (\frac{1}{2})^4$$

$$\Rightarrow (-5^r)^{-1} = (-\frac{1}{5^r})^{-1} = (-\frac{1}{5^r})^{-1} = (-20)^1 = -20$$

$$(-1)^{\frac{21}{10}} = -1 < -2 = -\frac{1}{14} < 0^{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} < 2^{-\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} < 1^{-\frac{9}{10}} = 1 < (-\frac{1}{2})^2 = 4 < 2^{\frac{3}{10}} = \lambda < (-v)^{\frac{2}{10}} = 49 \stackrel{1}{\approx}$$

$$(0.987)^{\frac{10}{10}} < 1^{\frac{1}{10}} \Rightarrow (0.987)^{\frac{10}{10}} < 1 \checkmark$$

$$1.2 > 1_{10} \Rightarrow (1.2)^{\frac{1}{10}} > (1_{10})^{\frac{1}{10}} \stackrel{9}{\approx}$$

$$\frac{20}{4} > 0.2 \Rightarrow (\frac{20}{4})^r > (0.2)^r$$

$$\frac{3}{4} = 0.75 \Rightarrow (\frac{3}{4})^r > (0.75)^r$$

۱ آیا نساوی $(-v^2)^3 = (-v^3)^2$ درست است؟

$$(-v^2)^3 = (-49)^3 = -117649$$

$$(-v^3)^2 = (-343)^2 = 117649$$

در واقع عدد $(-v^2)^3$ عددی مثبت و عدد $(-v^3)^2$ عددی منفی است

جواب: خیر زیرا

۲ اگر a عددی است و m, n اعدادی صحیح باشند،

الف) $0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$

ب) $a = 1 \Rightarrow a^m = a^n$

ج) $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$

$$\dots < (\frac{1}{4})^2 < (\frac{1}{3})^1 < (\frac{1}{2})^0 < (\frac{1}{1})^1 < (\frac{1}{\frac{1}{2}})^2 < (\frac{1}{\frac{1}{3}})^3 < \dots$$

توضیح: هرچه قدر توان عدد $\frac{1}{n}$ بزرگتر می‌شود حاصل کوچک‌تر و هرچه قدر توان آن کوچک‌تر می‌شود حاصل عددی بزرگ‌تر است.

۳ حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

$$[(14^3)^2]^3 = 14^{3 \times 2 \times 3} = 14^{18} = (2^4)^{18} = 2^{72}$$

۴ حاصل عبارات $(\omega^2)^3$ و $(\omega^3)^2$ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

$$(\omega^2)^3 = \omega^{2 \times 3} = \omega^6, \quad \omega^3 = \omega^6 \quad (\text{زیرا } 2^3 = 8)$$

$$(\omega^3)^2 = \omega^2 \times \omega^2 \times \omega^2 = \omega^{2+2+2} = \omega^{6} = \omega^6$$

$$\omega^6 = \omega^{2 \times 3 \times 2} = \omega^12$$

$$\omega^m \neq (\omega^m)^n$$

توضیح

- اعداد 2^{42} و 2^{43} را باهم مقایسه کنید

$$2^{43} = (2^1)^{41} = 1^{41}, \quad 2^{42} = (2^1)^{41} = 1^{41}$$

$$\Rightarrow 1^{41} > 1^{41} \Rightarrow 2^{43} > 2^{42}$$

٤- حاصل عبارت (٢٥) زیر را بحث کن و تعداد کوچک از این نتایج بفرموده باشید.

$$1) \frac{\lambda^{-11} \times (\omega/\gamma^2)^{-3}}{\gamma^{-9} \times \gamma^8} = \frac{(\gamma^4)^{-11} \times (\frac{1}{\gamma^2})^{-3}}{\gamma^{-9} \times (\gamma^4)^8} = \frac{\gamma^{-33} \times \gamma^3}{\gamma^{-9} \times \gamma^{10}} = \frac{\gamma^9 \times (\gamma^2)^3}{\gamma^{33} \times \gamma^{10}} = \\ = \frac{\gamma^9 \times \gamma^6}{\gamma^{43}} = \frac{\gamma^{15}}{\gamma^{43}} = \gamma^{-28} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{28}$$

$$2) \gamma v^{11} + \gamma v^{11} + \gamma v^{11} = \gamma \times \gamma v^{11} = \gamma^1 \times (\gamma^3)^{11} = \gamma \times \gamma^{33} = \gamma^{34}$$

$$3) 10 \times \gamma^{14} + 12 \times \gamma^{14} + 3 \times \gamma^{11} = (\omega \times \gamma) \times \gamma^{14} + (\gamma \times \omega) \times \gamma^{14} + \gamma \times \gamma^{11} \\ = \omega \times \gamma^{11} + \gamma \times \gamma^{11} + \gamma \times \gamma^{11} = \gamma^{11} (\omega + \gamma + \gamma \times \gamma^3) = \gamma^{11} (1 + \gamma^4) \\ = \gamma^{11} \times \gamma^4 = \gamma^{11} \times \gamma^8 = \gamma^{29}$$

$$4) \frac{140^{11} \times 10^{-4} \times (\frac{\gamma}{\gamma^2})^{14}}{\gamma^0 \times \gamma^{-8} \times (\gamma \gamma^2)^{-4}} = \frac{(\gamma^3 \times \gamma \times \omega)^{11} \times (\gamma^4 \times \omega)^{-4} \times \gamma^{14} \times \gamma^{-14}}{(\gamma \times \omega)^{\gamma} \times (\gamma \times \gamma)^{-8} \times (\\ = \frac{\gamma^{33} \times \gamma^{11} \times \omega^{11} \times \gamma^{-14} \times \gamma^{-4} \times \gamma^{14} \times \gamma^{-14}}{\gamma^{14} \times \omega^{\gamma} \times \gamma^{-8} \times \gamma^{-8} \times \gamma^{-4}} = \frac{\gamma^{\omega + (-14) + 14 - 4 + 14} \times \gamma^{11 + (-14)} \times \omega^{11 + (-8)}}{\gamma^{14 + (-8)} \times \omega \times \gamma^{-8} \times (\gamma^2)^{\gamma}} \\ = \frac{\gamma^{\omega + 1} \times \cancel{\omega} \times \cancel{\gamma}^{\gamma} \times \cancel{\gamma}^{\gamma} \times \cancel{\omega}^{\omega}}{\gamma^9 \times \cancel{\omega}^{\omega} \times \cancel{\gamma}^{\gamma} \times \cancel{\gamma}^{\gamma} \times \cancel{\omega}^{\omega}} = \frac{\gamma^{\omega + 1}}{\gamma^{14}} = \gamma^{\omega_0}$$

$$5) \gamma^{22} \times \gamma^{33} = \gamma^{\gamma \times 11} \times \gamma^{\gamma \times 11} = (\gamma^{\gamma})^{11} \times (\gamma^{\gamma})^{11} = \gamma^{11} \times \gamma^{11} = 101^{11}$$

$$6) \omega \times \gamma^{18} = \omega^{\gamma} \times \gamma^{\omega \times 4} = (\omega^{\gamma})^4 \times (\gamma^{\omega})^4 = \gamma^{\omega_0} \times \gamma^4 = \gamma_{00}^4$$

$$7) \frac{14^{\gamma} \times 14 \omega^{\gamma}}{\gamma^{\omega} \times \gamma^{\omega}} = \frac{(\gamma^4)^{\gamma} \times (\omega^{\gamma})^{\gamma}}{(\omega^{\gamma})^{\omega} \times (\gamma^{\omega})^{\omega}} = \frac{\gamma^{28} \times \omega^{\gamma}}{\omega^{\gamma} \times \gamma^{\omega}} = \frac{\gamma^{28}}{\gamma^{\omega_0}} = \gamma^{\gamma}$$

فعالیت کنیم (توان نسبت) به تعداد توان عددها، همیز نه
درس دوم: نماد علمی سمت راست تغییر مکان من رهد و آنرا آن را بر توان ازه ا نقیم
اگر عددی را در توان ازه ا همیز کنیم، آنرا توان ها نسبت باشد به تعداد توان عددها، همیز نه

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان های 10^0 یا حاصل تقسیم آنها بر توان های 10^0 خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می کند؟

عدد	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	
	۱۰	۱۰۵	۱۰۵	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰۵	۱۰۵	۱۰۵	۱۰۵	
۱۵	۱۵۰	۱/۱۵	۱۵۰۰	۰/۱۵	۱۵۰۰۰	۰/۰۱۵	۱۵۰,۰۰۰	۰/۰۰۱۵	۱۵۰۰,۰۰۰	۰/۰۰۱۵	۱۵۰۰,۰۰۰	۰/۰۰۱۵
۰/۰۲	۰/۳	۰/۰۰۲	۲	۰/۰۰۰۲	۲۰	۰/۰۰۰۰۲	۲۰۰	۰/۰۰۰۰۰۲	۲۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۲	۲۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۲
۹۳	۹۳	۰/۹۳	۹۳۰	۰/۰۹۳	۹۳۰۰	۰/۰۰۹۳	۹۳,۰۰۰	۰/۰۰۰۹۳	۹۳۰,۰۰۰	۰/۰۰۰۰۹۳	۹۳۰,۰۰۰	۰/۰۰۰۰۹۳

۲- سرعت نور 3×10^8 متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در 10^0 ساعت می‌پیماید، چند متر است؟ راه حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهد که حل چگونه به دست آمده است.

$$\text{فاصله‌ای که قور در ۱۰۰ ساعت می‌پیماید} = ۳۶,۰۰۰ \times ۳۶,۰۰۰ = ۱,۲۹۶,۰۰۰,۰۰۰$$

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد 10^n نمایش می‌دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند، بنابراین:

$$3000000 = 3 \times 10^6 \quad \Rightarrow \quad 3 \times 10^6 \times 3 / 6 \times 10^5 = 10 / 10 \times 10^{11} = 1 / 10 \times 10^{11}$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است.
این گونه نمایش به جز سادگی در نوشتمن، محاسبات را آسان‌تر می‌کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عده‌های بزرگ (یا کوچک) به شمار می‌آید.

مثال:

$$124000 = 1/24 \times 10^5$$

$$170000000 = 1/7 \times 10^9$$

$$1393 = 1/393 \times 10^3$$

$$9204000 = 9/204 \times 10^6$$

$$125/39 = 1/2539 \times 10^1$$

قطر متوسط یک سلول گلبول قرمز 7×10^{-6} میلیمتر است. همانند اعدادهای بزرگ، اعدادهای کوچک مانند 7×10^{-6} را هم می‌توان به صورت نماد علمی نمایش داد؛ یعنی:

$$0/000007 = 7 \times 10^{-6}$$

ضخامت یک برگه کاغذ حدود 16×10^{-3} سانتیمتر است که با نماد علمی، آن را به صورت 16×10^{-3} نمایش می‌دهیم.

به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عددی صحیح است.

$$0/00001275 = 1/275 \times 10^{-5}$$

$$123 = 1/23 \times 10^2$$

مثال:

$$0/0137 = 1/37 \times 10^{-2}$$

$$29000 = 2/9 \times 10^4$$

کار در کلاس

۱- هر یک از اعدادهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید:

$$245000 = 2,45 \times 10^5$$

$$15,000,000 = 1,5 \times 10^8$$

$$0/0005 = 0 \times 10^{-3}$$

$$0/000061 = 6,1 \times 10^{-5}$$

$$1404 = 1,404 \times 10^3$$

$$0/1275 = 1,275 \times 10^{-1}$$

۲- نمایش اعشاری اعدادهای زیر را بنویسید:

$$0/2 \times 10^{-2} = 0,0052$$

$$7/304 \times 10^{-5} = 0/00007304$$

$$2/28 \times 10^8 = 228,000,000$$

$$9/4612 \times 10^1 = 9,461,200,000$$

$$6/02 \times 10^{-4} = 0,00062$$

$$1/1 \times 10^9 = 11000$$

تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{8}} \quad (\text{ب})$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$1/0.2 \times 10^{-5} = 0.0000102 \quad \text{⊗}$$

$$0.9 \times 10^{-1} = 0.059 \quad \text{⊗}$$

$$4/3 \times 10^3 = 4300 \quad \text{⊗}$$

$$7/0.4 \times 10^{-3} = 0.0175 \quad \text{⊗}$$

$$6/18 \times 10^7 = 6180000 \quad \text{⊗}$$

$$8/257 \times 10^4 = 8257 \quad \text{⊗}$$

۳- شاع خورشید تقریباً ۶۹۵۰۰۰ کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۴- اندازه یک باکتری ۵ × ۱۰⁻۷ متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۵- قطر خورشید حدود $1/4 \times 10^9$ متر و قطر زمین حدود $1/3 \times 10^7$ متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟ صفحه ۴۷، ۱

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید:

$$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^1$$

$$\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-11}}$$

صفحه ۴۷، ۱

۷- فاصله مریخ از زمین $9/17 \times 10^7$ کیلومتر و فاصله کیوان از زمین $6/287 \times 10^8$ کیلومتر

است. با مقایسه این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک‌تر است؟

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$$2/7 \times 10^0 > 0/02 > 0/03 > 0/002 \times 10^0$$

۹- عدهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$1/0 \times 10^{-1}, 1/2 \times 10^6, 5/35 \times 10^{-3}, 3/7 \times 10^{-2}$$

$$(الـ) \frac{3^{-\Delta} \times 10^{-\Delta} \times 20}{4^{-\Delta} \times 15^{-\Delta}} = \frac{10^{-\Delta} \times 2}{9^{-\Delta}} = \left(\frac{10}{9}\right)^{-\Delta} \times 2 = \left(\frac{1}{\frac{9}{10}}\right)^{\Delta} \times 20 = \frac{1}{\left(\frac{9}{10}\right)^{\Delta}} \times 20$$

$$= 1^{\omega} \times 1^{\delta} = 11 \times 1^{\delta} = 100$$

$$\therefore \frac{\lambda^{-1} x \lambda^k}{\lambda^{-k} x \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda^k x (\lambda^k)^k}{\lambda \times \lambda^{-1}} = \frac{\lambda^k x \lambda^{k^2}}{\lambda^0} = \frac{\lambda^{k^2+1}}{1} = \lambda^{k^2+1}$$

$$\frac{\text{قطر خورسید}}{\text{قطر زمین}} = \frac{1.4 \times 10^9}{1.3 \times 10^8} = \frac{14 \times 10^8}{13 \times 10^8} = \frac{14}{13} \times 10^2 \approx 1.07 \times 10^2 = 107$$

قطر خورسید 7 برابر زمین است

$$Y \times \overbrace{I_0}^{-r} \times F \times \overbrace{I_0}^q = \lambda \times (\overbrace{I_0}^{-r} \times \overbrace{I_0}^q) = \lambda \times I_0$$

$$\frac{12/\omega \times 10^{-4}}{12\omega \times 10^{-19}} = \frac{12\omega \times 10^{-5}}{12\omega \times 10^{-19}} = 10^4 \times \frac{10^{-5}}{10^{-19}} = \omega \times 10^{14}$$

$$9,28V \times 10^8 = 42,8V \times 10^7 \text{ } \textcircled{>} \text{ } 9,1V \times 10^7 \Rightarrow$$

میخ به زمین نزدیک تر است

$$0.02 < \gamma_1 \times 10^{-4} < \gamma_1 \times 10^{-3} < \gamma_1 \times 10^{-2} < \gamma_1 \times 10^{-1} < \gamma_1 \times 10^0 < \gamma_1 \times 10^1 < \dots$$

$$0.1 \times 10^{-1} > 0.1 \times 10^{-2} > 0.1 \times 10^{-3} > 0.1 \times 10^{-4} > 0.1 \times 10^{-5} > \dots$$

$$1,0 \times 10^{-4} = 1.0 \times 10^{-4}, \quad 1.2 \times 10^4 = 1.2 \times 10,000, \quad 0.12 \times 10^{-10}$$

$$4\sqrt{x} \times 10^{-4} = 4\sqrt{x} \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow 2,30 \times 10^{-3} < 10 \times 10^{-3} < 3,1 \times 10^{-3} < 1,2 \times 10^{-3}$$

فعالیت

۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را مانند نمونه‌ها به دست آورید :

$$(-3)^2 = 9$$

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$(-\sqrt{5})^2 = 5$$

$$\left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$$

$$4^2 = 16$$

$$(-4)^2 = 16$$

مربع (توان دوم) عدد ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه‌های دوم عدد ۹ می‌نامند.

همان‌گونه که در سال‌های گذشته دیده‌اید، ریشه‌های دوم ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نمایش می‌دهند و داریم :

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{و} \quad -\sqrt{9} = -3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید :

عدد	۳	-۳	۴	-۴	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\sqrt{4}$	$-\sqrt{4}$
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶		$\frac{4}{9}$		۵		$\frac{1}{49}$		۴	

ریشه‌های دوم عدد $\frac{4}{9}$ ، اعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ هستند. ریشه‌های دوم ۷، اعداد $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم $\sqrt{0} = 0$.

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{b} و $-\sqrt{b}$ را ریشه‌های دوم b می‌نامند. همان‌طور که می‌دانید اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳	۴	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸	۲۷	-۲۷	۶۴	$\frac{1}{125}$	$-\frac{1}{8}$	۱۲۵	$-\frac{8}{27}$	۰

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی $2^3 = 8$. ریشه سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به توان ۳ برسد، برابر ۸ می‌شود؛ پس، ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{8} = 2$. همچنین $\sqrt[3]{-8} = -2$ (ریشه سوم عدد -8 برابر -2 است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{-8} = -2$)؛ به عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر $\sqrt[3]{64} = 4$ و ریشه سوم عدد $\sqrt[3]{-64} = -4$ است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید :

$$(\sqrt[3]{8})^3 = 8 \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-27} = -3$$

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهیم.

هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید :

$$\sqrt{81} = 9 \quad \sqrt{4^2} = 4 \quad \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4 \quad \sqrt{-1} = -1$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5} \quad \sqrt[3]{6^3} = 6 \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5} \quad \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$$

۲- به کمک رابطه $\sqrt{x^2} = |x|$ ، که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6 \quad \sqrt{8^2} = |8| = 8 \quad \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \quad \sqrt{(2-9)^2} = |2-9| = 7 \quad \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \left|1-\frac{1}{3}\right| = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۳- حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت‌ها

حل شده است.

الف) x و y هر دو مثبت هستند ($x > 0, y > 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x + y$

ب) x مثبت و y منفی است ($x > 0, y < 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y$

ج) x منفی و y مثبت است ($x < 0, y > 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x + y$

د) x و y هر دو منفی هستند ($x < 0, y < 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x - y$

١- حاصل رادیس اورید

(الف) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \underbrace{|\sqrt{3}-\sqrt{2}|}_{\text{مثبت}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

(ب) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|\sqrt{2}-\sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-\sqrt{2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

(ج) $\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3} = 2-\sqrt{5}$

(د) $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -(x-1) = -x+1 & x < 1 \end{cases}$

٢- حاصل رادیس اورید

١) $\sqrt[4]{5^4} = |5| = 5$

٢) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

٣) $\sqrt[9]{(-5)^9} = |-5| = 5$

٤) $\sqrt[9]{(2-\sqrt{5})^9} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$

Дополнительно

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \left(\frac{1}{2} - 1 \right)_+ \quad |y-x| = \sqrt{(y-x)^2} = \sqrt{y^2 - 2xy + x^2} = \sqrt{y^2} - \sqrt{2xy} + \sqrt{x^2}$$

$$|x+y| = |x| + |y| \quad \text{если } xy > 0 \text{ и } x, y \in \mathbb{R}$$

$$|x-y| = |x| + |y| \quad \text{если } xy < 0 \text{ и } x, y \in \mathbb{R}$$

$$|x+y| = |x| + |y| \quad \text{если } x > 0 \text{ и } y > 0 \text{ и } x, y \in \mathbb{R}$$

$$|x-y| = |x| + |y| \quad \text{если } x > 0 \text{ и } y < 0 \text{ и } x, y \in \mathbb{R}$$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت a و b رابطه‌های زیر را یاد گرفتید:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرار است:

فعالیت

با توجه به عده‌های داده شده a و b جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر

جدول چه حدسی می‌زیند؟

a	$\sqrt[3]{a}$	b	$\sqrt[3]{b}$	ab	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$2 \times 5 = 10$
۲۷	۳	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{3}{2}$	$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
-۸	-۲	۲۷	۳	-۲۱۶	-۴	-۴ × ۳ = -۱۲

به طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ ، همچنین اگر

$b \neq 0$ داریم:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

کار در کلاس

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهد.

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8+27}$$

خوب

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی برابر ۵ می‌باشد، در حالی که سمت راست آن کمتر از ۴ است.»

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5$$

$$\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{35} < \sqrt[3]{4^3} = 4 \Rightarrow \sqrt[3]{35} < 4$$

v.

۲- در تساوی های زیر جاهای خالی را کامل کنید :

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \cdot 16} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-2 \cdot 4} = \sqrt[3]{-8} = -2 \times (-2) = -4$$

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

تمرین

۱- رشته های دوم عدد های زیر را باید :

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- رشته سوم عدد های زیر را به دست آورید :

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 10$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ **مخفی**

$\otimes \quad \sqrt{(-1)^3} = -1$	$\checkmark \quad \sqrt[3]{(-1)^3} = -1$	$\checkmark \quad \sqrt{(-5)^2} = -5 = 5$	$\checkmark \quad \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
$\otimes \quad -\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$	$\checkmark \quad \sqrt{1/44} = 1/2$	$\otimes \quad (\sqrt{-1})^3 = 1$	$\checkmark \quad \sqrt[3]{-64} = -4$
تعزیر شده			

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$$\cancel{\sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{36}}$$

$$\cancel{\sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{81}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$$

$$\sqrt[3]{-25} \times \sqrt[3]{5}$$

$$-5$$

$$\sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{36} = 5 \times 4 = 20, \quad \sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{81} = (-1) \times 9 = -9, \quad \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[3]{-25} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{-125} = -5$$

تمرين

$$\frac{\sqrt{9}}{14} \xrightarrow[\text{رسانه کی دو}]{} \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{1}{14} \xrightarrow[\text{رسانه کی دو}]{} \frac{1}{\sqrt{9}}, -\frac{1}{\sqrt{9}}$$

$$15 \xrightarrow[\text{رسانه کی دو}]{} \pm\sqrt{15}, \quad 12 \xrightarrow[\text{رسانه کی دو}]{} \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}, \quad 14 \xrightarrow[\text{رسانه کی دو}]{} \pm\sqrt{14} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{14} \xrightarrow[\text{رسانه کی سوم}]{} \frac{1}{\sqrt{4}}, \quad \sqrt[3]{\frac{1}{14}} \xrightarrow[\text{رسانه کی سوم}]{} \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{14}} \xrightarrow[\text{رسانه کی سوم}]{} -\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

$$\sqrt{(-3)^2} = 3, \quad (\sqrt{-3})^2 = \text{تعريف تردید}$$

$\sqrt{(-3)^2} \neq (\sqrt{-3})^2$

شما

Donpolka.RU

✓/✓

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست باشد:

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{4} \Rightarrow \sqrt[3]{a} < 2 \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{8} \Rightarrow a < 8$$

۶- رابطه $x = \sqrt{(-x)^2}$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید. صحنه

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $96a^3$ باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

۸- اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدر مطلق بنویسید.

۹- عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید: $\sqrt[3]{90} = \sqrt[3]{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{10} = 3\sqrt[3]{10}$

$$\sqrt[3]{150}, \quad \sqrt[3]{80}, \quad \sqrt[3]{24}, \quad \sqrt[3]{125}$$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2 \quad \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

$$\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} = \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{4}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{4}}{\sqrt{5}} =$$

$$2\sqrt[3]{14} \times \sqrt[3]{4} = 4 \times \sqrt[3]{14 \times 4} = 4\sqrt[3]{48} = 4 \times (4) = 24$$

$$\frac{\sqrt{16} \times \sqrt{4}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{16 \times 4}{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 4}{10}} = \sqrt[3]{24} = 4$$

$$\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x| \quad , \quad \sqrt{(-x)^4} = x$$

$$\sqrt{(-r)^2} = r \quad , \quad \sqrt{(-(-r))^2} = -r \text{ when } r > 0 \quad \text{but } |x| = x \quad (\text{if } r > 0)$$

$$\sqrt{S} = 94a^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \text{نحو} \sqrt{S} = 94a^{\frac{1}{4}} \div 4 = 14a^{\frac{1}{4}}$$

✓

نحو طبقه هر راه را میتوان اسعاي منظر

$$\text{الناتج} V = (\text{الناتج المضاعف})^{\mu} = (\varepsilon |\alpha|)^{\mu} = \gamma F \alpha^{\mu} |\alpha| \xrightarrow{\alpha > 0} V = \gamma F \alpha^{\mu}$$

$$\begin{aligned} x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^r} = |x| = x \\ y < 0 \Rightarrow \sqrt{y^r} = |y| = -y \end{aligned} \quad \Rightarrow \sqrt{x^r} - \sqrt{y^r} = |x| - |y| = x - (-y) \stackrel{A}{=}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^r} - \sqrt{y^r} = x + y$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{4 \times 4 \times 4} = \sqrt{4 \times 4} \times \sqrt{4} = \sqrt{4} \times 2 = 2\sqrt{4}$$

$$\sqrt{\lambda_0} = \sqrt{r^k \times \omega} = \sqrt{r^k} \times \sqrt{\omega} = r\sqrt{\omega}$$

$$\sqrt{r^4} = \sqrt{r^3 \times r} = \sqrt{r^2 \times r \times r} = \sqrt{r^2} \times \sqrt{r} = r\sqrt{r}$$

$$\sqrt[4]{140^4} = \sqrt[4]{(140)^4} = \sqrt[4]{14^4} = \sqrt[4]{(14^4)^4} = 14^4 = 140$$

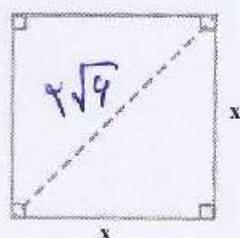
$$(\sqrt[3]{-2})^3 = (-\sqrt[3]{2}) \times (-\sqrt[3]{2}) \times (-\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{(-2)(-2)(-2)} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{(-1) \times 4} = \sqrt[4]{-1} \times \sqrt[4]{4} = -1 \times \sqrt[4]{4} = -\sqrt[4]{4}$$

$$\sqrt[3]{0} = 0, \quad \sqrt[3]{-1} = -1, \quad \sqrt[3]{1} = 1 \quad \text{and} \quad \sqrt[3]{-8} = -2$$

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $2\sqrt{6}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.



$$\text{حل: به کمک رابطه } \text{پیشاعرض} \text{ داریم: } x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$$

$$\text{در نتیجه: } 2x^2 = 24 \text{ و از آنجا: } x^2 = 12$$

بنابراین مساحت این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که اندازه ضلع مربع $\sqrt{12}$ متر یا $2\sqrt{3}$ متر است.

$$\text{همچنین: متر } 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \text{ — محیط}$$

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آنها را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت $3\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2}$ دارای قسمت‌های رادیکالی یکسان هستند و داریم: $7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات $2\sqrt{5}$ و $2\sqrt{2}$ یا عبارات $7\sqrt{2}$ و $7\sqrt{5}$ یکسان نیستند.

کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

$2\sqrt{7}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$2\sqrt{a}$	\sqrt{xy}	$\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	\sqrt{z}
$8\sqrt{7}$	$8\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt{2}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	$4\sqrt{xy}$	$6\sqrt{2}$
$11\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$	$\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{10}$	$\frac{15}{5}\sqrt{a} - 5\sqrt{b}$	$5\sqrt{xy} - 5\sqrt{x}$	$7\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$

ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

فعالیت

حاصل عبارات زیر را ساده کنید.

راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم :

(جاهای خالی را کامل کنید).

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

بنابراین :

$$\sqrt{50} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3}$$

$$= 5\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{4}$$

مثال ۱ : حاصل $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ را به دو روش به دست آورده‌ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

$$\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^2} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2}$$

$$= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6}$$

$$\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$$

مثال ۲ : حاصل $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$ را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

$$(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3} = \sqrt{3} \div \sqrt{3} = 1$$

ا. حاصل را بحث کنید

$$1) \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$$

$$2) \sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(-2) \times 4} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$3) \sqrt{3-\sqrt{8}} \times \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})} = \sqrt{9 + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{8} - \sqrt{8 \times 8}}$$

$$= \sqrt{9 - 8} = \sqrt{1} = 1$$

$$4) \sqrt{\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt{2} \times \sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$$

$$5) \sqrt[3]{2-\sqrt{8}} \times \sqrt[3]{2+\sqrt{8}} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{8})(2+\sqrt{8})} = \sqrt[3]{4+2\sqrt{8}-2\sqrt{8}-\sqrt{8 \times 8}}$$

$$= \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$6) \frac{\sqrt{12} \times \sqrt{10}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{12 \times 10}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{120}{20}} = \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

۲- عبارت هایی را ساده نماید

$$1) \omega\sqrt{11} + \varepsilon\sqrt{11} - \vartheta\sqrt{11} = (\omega + \varepsilon - \vartheta)\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$$

$$2) 2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \sqrt{12} - \sqrt{16} - \sqrt{8} = 2\sqrt{9 \times 2} - 3\sqrt{4 \times 8} + \sqrt{4 \times 3} - \sqrt{4} - \sqrt{8 \times 2}$$

$$= 2 \times 3\sqrt{2} - 3 \times 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{4} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{4} - 2\sqrt{2}$$

$$= (4 - 12 - 2)\sqrt{2} + (2 - 1)\sqrt{3} = -6\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 6\sqrt{2}$$

$$3) (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{4} - \sqrt{4} + \sqrt{3})$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} - (3 - 2\sqrt{3}) = 3 + 2\sqrt{3} - 3 + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید. صفحه ۷۵/۱

$$1) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$$

$$4) \sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}}$$

$$2) \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$$

$$3) 5\sqrt{2} + 3\sqrt{54} - 4\sqrt{128}$$

$$5) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

گویا کردن مخرج کسرها: وقتی مخرج نسر را برابر با $\sqrt{3}$ کنیم کار آنها آسان تر خواهد شد
گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا آسان تر کردن محاسبات، لازم است
مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به طور مثال برای محاسبه $\frac{2}{\sqrt{2}}$ باید عدد 2 را بر
 $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به صورت زیر گویا کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1\sqrt{2}$$

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هرجا لازم است حل را کامل کنید.

$$\text{الف) } \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\text{ج) } \frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\text{د) } \frac{2\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{14}}{2} = \frac{\sqrt[3]{14}}{1}$$

$$\text{ه) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{x} \quad (x > 0)$$

$$\text{و) } \frac{5}{\sqrt[3]{z^2}} \times \frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{5\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z^3}} = \frac{5\sqrt[3]{z}}{z} \quad (z \neq 0)$$

$$1) \sqrt{9\lambda} - \sqrt{\omega_0} + \sqrt{12\lambda} = \sqrt{3^2 \times 3} - \sqrt{\omega \times 3} + \sqrt{4^2 \times 3} = 3\sqrt{3} - \omega\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$2) \sqrt{2\lambda} - \sqrt{12} - \sqrt{12\omega} + \sqrt{4\lambda} = \sqrt{3^2 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{\omega \times 3} + \sqrt{2^2 \times 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - \omega\sqrt{3} + \sqrt{4 \times 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \omega\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - \omega\sqrt{3}$$

$$3) \omega\sqrt{2} + 3\sqrt{\omega\lambda} - 4\sqrt{12\lambda} = \omega\sqrt{2} + 3\sqrt{3^2 \times 3} - 4\sqrt{4^2 \times 3} = \omega\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 16\sqrt{3} = -7\sqrt{3}$$

$$4) \sqrt{4 + \frac{1}{\lambda} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{42\lambda + 1 + 4\lambda}{\lambda\lambda}} = \sqrt{\frac{46\lambda + 1}{\lambda\lambda}} = \frac{19}{9}$$

$$5) (\underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{3}}_{= 3\sqrt{2} - \sqrt{3}})(\underbrace{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}_{= 3\sqrt{2} - \sqrt{3}}) = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} - \sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{2^2} - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{3^2} = \underbrace{4 - \sqrt{6} + 3\sqrt{6}}_{= 4 + 2\sqrt{6}} - 3 = 3 + 2\sqrt{6}$$

مخرج سری ریاضی

$$1) \frac{\gamma}{\sqrt{\omega} - \sqrt{\lambda}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\omega} - \sqrt{\lambda}} \times \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\lambda}} = \frac{\gamma(\sqrt{\omega} + \sqrt{\lambda})}{\sqrt{2\omega} - \sqrt{\lambda\omega} + \sqrt{\lambda\omega} - \sqrt{\lambda}} = \frac{\gamma(\sqrt{\omega} + \sqrt{\lambda})}{\omega - \lambda}$$

$$= \cancel{\gamma} \frac{(\sqrt{\omega} + \sqrt{\lambda})}{\cancel{\gamma}} = \sqrt{\omega} + \sqrt{\lambda}$$

$$2) \frac{\omega}{\sqrt{\lambda} + 1} = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda} + 1} \times \frac{\sqrt{\lambda} - 1}{\sqrt{\lambda} - 1} = \frac{\omega(\sqrt{\lambda} - 1)}{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} - 1} = \frac{\omega(\sqrt{\lambda} - 1)}{\lambda - 1} = \omega\sqrt{\lambda} - \omega$$

$$3) \frac{\gamma}{\gamma + \sqrt{\omega}} = \frac{\gamma}{\gamma + \sqrt{\omega}} \times \frac{\gamma - \sqrt{\omega}}{\gamma - \sqrt{\omega}} = \frac{\gamma(\gamma - \sqrt{\omega})}{\gamma - \sqrt{\omega} + \sqrt{\omega} - \sqrt{\omega}} = \frac{\gamma(\gamma - \sqrt{\omega})}{\gamma - \sqrt{\omega}} = \gamma - \sqrt{\omega}$$

$$4) \frac{\gamma}{\sqrt{11} - \sqrt{\omega}} = \frac{\gamma}{\sqrt{11} - \sqrt{\omega}} \times \frac{\sqrt{11} + \sqrt{\omega}}{\sqrt{11} + \sqrt{\omega}} = \frac{\gamma(\sqrt{11} + \sqrt{\omega})}{\sqrt{11} + \sqrt{\omega} - \sqrt{\omega} - \sqrt{11}} = \frac{\gamma(\sqrt{11} + \sqrt{\omega})}{11 - \omega}$$

$$\sqrt{\omega/11} = \frac{\gamma(\sqrt{11} + \sqrt{\omega})}{\gamma} = \sqrt{11} + \sqrt{\omega}$$

کار در کلاس

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\begin{aligned}
 \text{(الف)} & \frac{6}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} \\
 \text{(ب)} & \frac{2}{\sqrt{32}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\
 \text{(ج)} & \frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{12\sqrt{4}}{\sqrt{36}} = \frac{12\sqrt{4}}{6} = 2\sqrt{4} \\
 \text{(د)} & \frac{5}{\sqrt[3]{3x}} \times \frac{\sqrt[3]{9x^2}}{\sqrt[3]{9x^2}} = \frac{5\sqrt[3]{9x^2}}{\sqrt[3]{27x^3}} = \frac{5\sqrt[3]{9x^2}}{3x} \\
 \text{(ه)} & (x \neq 0)
 \end{aligned}$$

تمرین

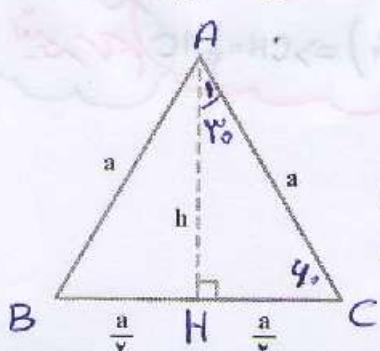
۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\text{(الف)} 2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72} \quad \text{(ج)} \sqrt[3]{27^2} \quad \text{(ه)} (\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$$

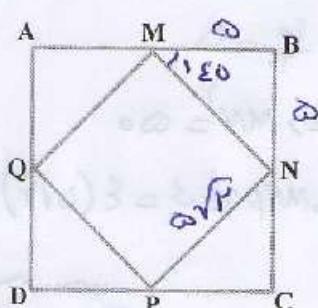
$$\text{(ب)} \sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50} \quad \text{(د)} \sqrt[3]{\frac{-27}{64}} \quad \text{(و)} 2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$$

۲- اگر $x > 0$ باشد حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

۳- محیط و مساحت مربعی به طول ضلع $3\sqrt{5}$ سانتیمتر را به دست آورید.



۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ضلع a نشان می‌دهد. اندازه ارتفاع h را برحسب a به دست آورید؛ سپس مساحت آن را برحسب a بنویسید.



۵- نقاط M, N, P, Q و سطوح اضلاع مربع ABCD هستند. اگر مساحت مربع ABCD، 100 مترمربع باشد، محیط مربع MNPQ چقدر است؟

1

ج

$$\text{ا) } 2\sqrt{10} + \sqrt{14} + 2\sqrt{14} = 2\sqrt{10 \times 2} + \sqrt{14 \times 2} + 2\sqrt{14 \times 2} = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

$$\text{ب) } \sqrt{1} + \sqrt{14} - \sqrt{10} = \sqrt{1 \times 2} + \sqrt{14 \times 2} - \sqrt{10 \times 2} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(9^2)^2} = \sqrt[3]{(9^2)^2} = \sqrt[3]{9^4} = 9$$

$$\text{د) } \sqrt{\frac{-24}{48}} = \sqrt{\frac{(-2)^3}{4^3}} = \sqrt{\left(\frac{-2}{4}\right)^3} = -\frac{2}{4}$$

$$\text{هـ) } (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{20} + \sqrt{4} - \sqrt{30} - \sqrt{10} = \sqrt{4 \times 5} + 2 - \sqrt{10 \times 2} - \sqrt{10} \\ = 2\sqrt{5} + 2 - 2\sqrt{2} - \sqrt{10}$$

$$\text{وـ) } 2\sqrt{48} - 3\sqrt{24} = 2\sqrt{14 \times 3} - 3\sqrt{9 \times 3} = 2 \times 4\sqrt{3} - 3 \times 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

$$x\sqrt{x^2} - x = x|x| - x \stackrel{x<0}{=} -x - x = -2x$$

$$b_{\text{مـ}} = 2 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}, \text{ Colm} = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{4} = 9 \times 2 = 18$$

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \Rightarrow h = a - \frac{a^2}{r} = \frac{ra^2 - a^2}{r} = \frac{ra^2}{r} = r^2 a^2 \stackrel{r=1}{=}$$

$$\Rightarrow h = \frac{r^2 a^2}{r} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{r} a}{r}$$

$$(H=90^\circ, A_1=1^\circ) \Rightarrow CH = \frac{1}{r} AC$$

$$(H=90^\circ, C=45^\circ) \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{r}}{r} AC$$

Donatihl.iR

$$ABCD \text{ Colm } S = 100 \Rightarrow AB = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow BM = AM = \frac{10}{r} = 10 \stackrel{r=1}{=}$$

$$\hat{B} \hat{M} \hat{N}: \hat{B}=90^\circ \Rightarrow MN^2 = BM^2 + BN^2 \Rightarrow MN^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow MN^2 = 200$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{200} \Rightarrow MN = \sqrt{10 \times 20} \Rightarrow MN = 10\sqrt{2} \Rightarrow MN \text{ مـ} = \epsilon (10\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$$

$$(\hat{B}=90^\circ, \hat{M}_1=\hat{N}_1=1^\circ) \Rightarrow MN = \sqrt{r} BM$$

شـ

$\sqrt{4/1}$