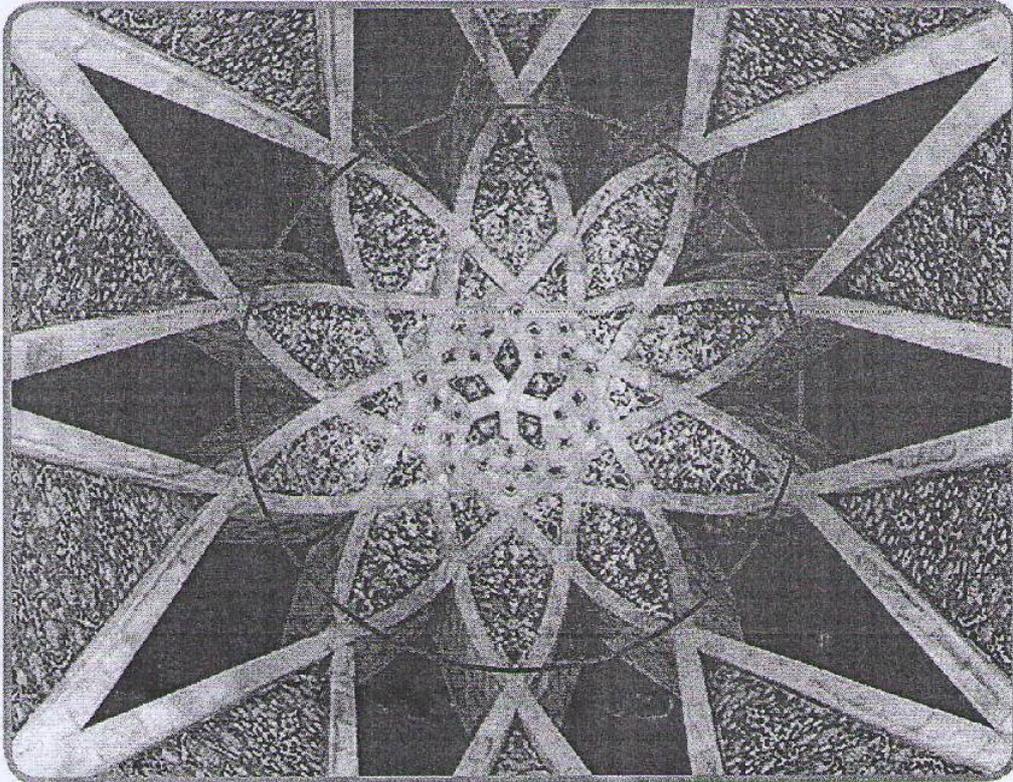




فصل ۹

دایره‌ها

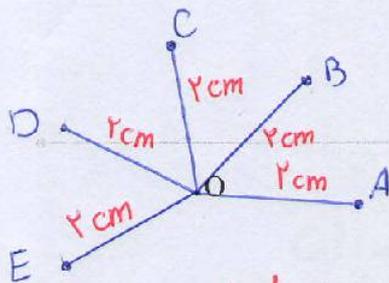


زاویه‌های محاطی و مرکزی و ارتباط آنها با کمان‌ها در دایره کاربرد بسیاری در طراحی نقش فرش‌ها و دیگر صنایع دستی و معماری دارد.

در تصویر بالا نمای داخلی سقف آرامگاه حکیم خیام نیشابوری را مشاهده می‌کنید. خیام، فیلسوف، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و رباعی‌سرای ایرانی قرن پنجم هجری شمسی است. یکی از برجسته‌ترین کارهای وی اصلاح گاهشماری ایران در زمان وزارت خواجه نظام الملک در دوره سلجوقی است.

خط و دایره

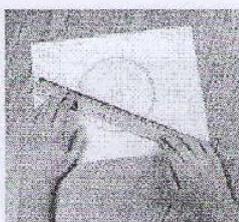
فعالیت



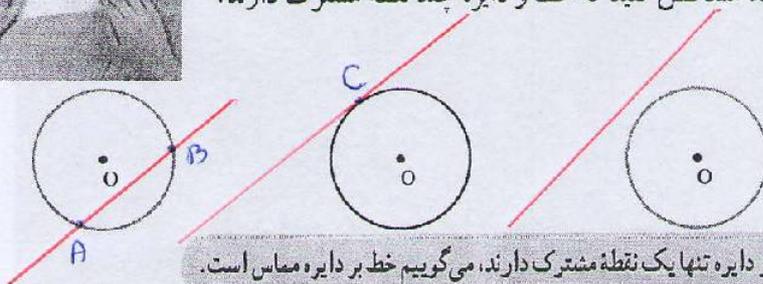
۱- پنج نقطه پیدا کنید که فاصله هر کدام از نقطه O، ۲ سانتی متر باشد.

تعریف دایره موازی

اگر این نقطه‌ها را بیشتر و بیشتر کنیم، چه شکلی ایجاد می‌شود؟ **دایره**
 ۲- دو خط یا موازی اند یا متقاطع؛ یعنی، یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.



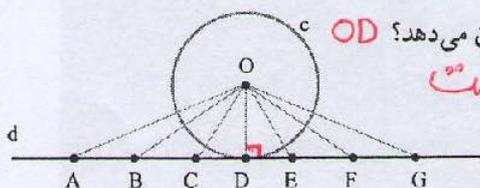
حالا سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت، مشخص کنید که خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.



تعریف مماس

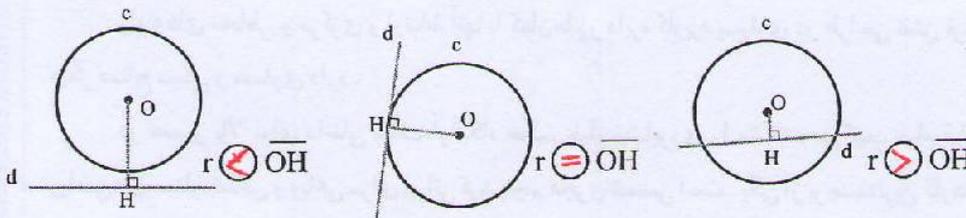
در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

۳- فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که آن نقطه را به خط وصل می‌کند. خط d بر دایره c به مرکز O و شعاع r مماس است.

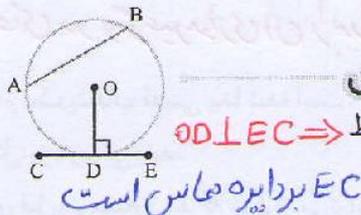
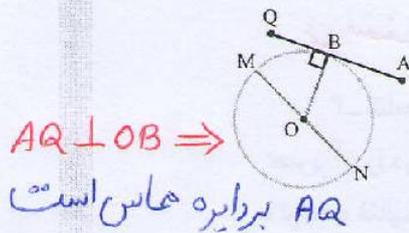


کدام پاره‌خط فاصله مرکز دایره از خط d را نشان می‌دهد؟ **OD**
 اندازه این پاره خط را r مقایسه کنید. **برابر است**

۴- در هر یک از شکل‌های زیر دایره‌ای به شعاع r رسم کرده‌ایم. فاصله مرکز دایره از خط d را \overline{OH} بنامید و بدون اندازه‌گیری، رابطه‌های زیر را با علامت $>$ ، $=$ ، یا $<$ کامل کنید.



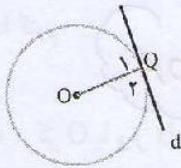
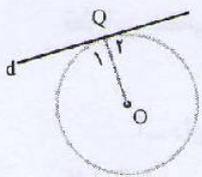
شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.



کار در کلاس



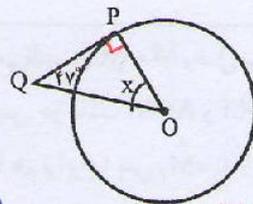
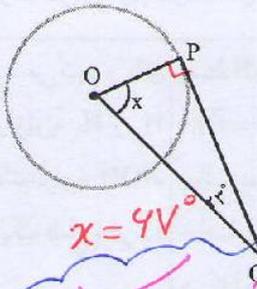
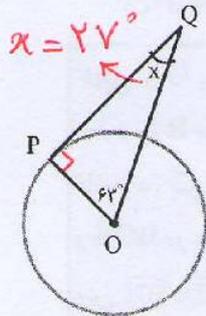
۱- در هر شکل، کدام پاره خط بر دایره مماس است؟



۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است. زاویه Q_1 چه نوع زاویه‌ای است؟ قائمه

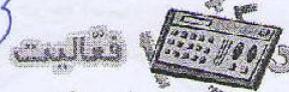
$\hat{Q}_1 = 90$

۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.

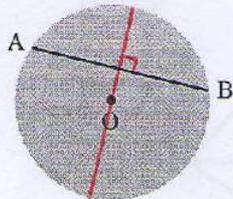


Дополн. iR

پیدا کردن مرکز دایره



۱- مانند شکل، روی یک ورق کاغذ دایره‌ای رسم کنید. سپس، صفحه

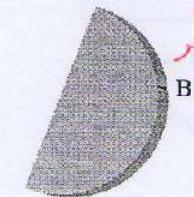


دایره‌ای شکل را با قیچی جدا کنید. دو نقطه A و B را روی دایره قرار دهید.

A را به B وصل کنید. این پاره خط وتر دایره نامیده می‌شود.

دایره را طوری تا کنید که نقاط A و B روی هم قرار بگیرند.

تای کاغذ را باز کنید.



روی خط تا را با مداد پر رنگ کنید. در هندسه به این پاره خط چه می‌گویند؟ قطر

روی دایره، وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را برای آن تکرار کنید.

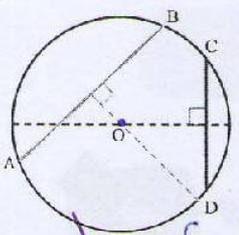
دو پاره خط رسم شده یکدیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟ مرکز

نکته: قطری که AB را نصف می‌کند بر آن عمود است

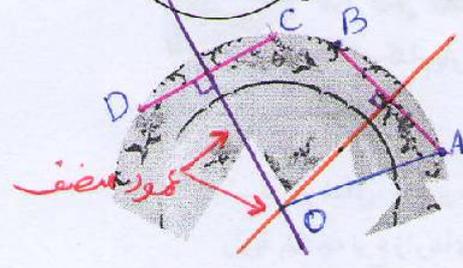
نکته: اگر عمود منصف دو وتر دلخواه غیر موازی را رسم کنیم یکدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند

وتر: پاره خطی که دو نقطه‌ای متمایز از یک دایره را هم وصل می‌کند را وتر نامیم

۳۶



۲- نتیجه فعالیت (۱) را به کمک شکل روبه‌رو توضیح دهید.
 برای پیدا کردن مرکز یک دایره، کافی است نقطه‌ی برخورد
 عمودنصف‌های دو وتر غیر موازی آن را پیدا کنیم



۳- قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است.
 تصویر آن را در شکل روبه‌رو می‌بینید.
 با توجه به فعالیت‌های قبل، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم
 قطر این بشقاب را پیدا کنیم.

قطر = ۲OA

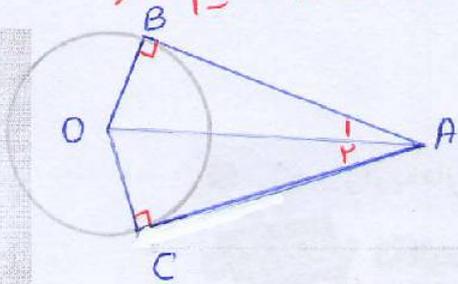
۴- دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن زیر را بخوانید و نتیجه هر یک از آنها را کامل کنید.

این دو چه تفاوتی دارند؟ درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

<p>خطی از O بر AB عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. دو زاویه H_1 و H_2 قائمه‌اند. پس دو مثلث قائم‌الزاویه AOH و BOH در حالت وتر و یک ضلع برابرند؛ پس $AH = BH$</p>	<p>وسط AB را M می‌نامیم و O را به M وصل می‌کنیم. پس دو مثلث AOM و BOM در حالت سه ضلع با هم برابرند؛ پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و چون حاصل جمع این دو زاویه 180° درجه است، پس هر کدام از آنها 90° درجه است.</p>

نتیجه: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند
 و برعکس پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند، بر آن عمود است

تکته: اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است و خطی که مرکز را به آن نقطه وصل می‌کنیم عمود بر آن دو مماس است

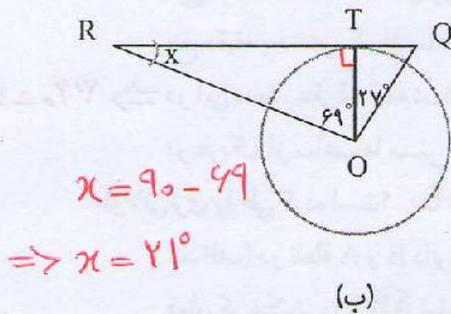


$$\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 \end{cases}$$

کار در کلاس



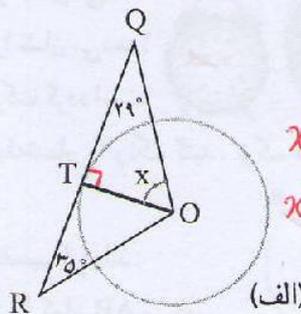
۱- در هر شکل، RQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



$$x = 90 - 69$$

$$\Rightarrow x = 21^\circ$$

(ب)



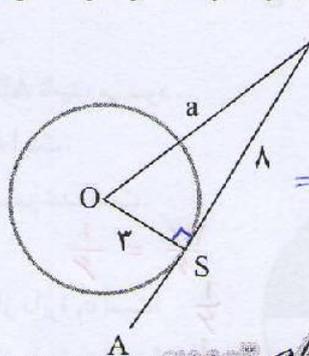
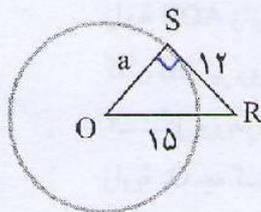
$$x = 90 - 29$$

$$x = 61$$

(الف)

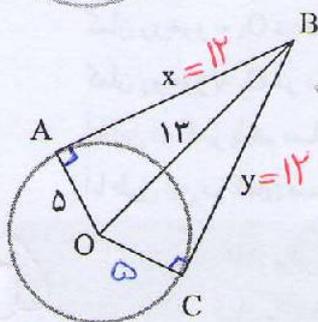
۲- در هر شکل، SR بر دایره مماس است. طول پاره خط a را به دست آورید.

$$a^2 = 15^2 - 12^2 \Rightarrow a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$$



$$a^2 = 11^2 - 3^2 = 9 + 44$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{55}$$



$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 12 \end{cases}$$

۱- نقطه B در فاصله ۱۳ سانتی متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ متر قرار دارد.

از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم.

فاصله B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

$$x^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$$

۲- از نقطه O' خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B بنامید.

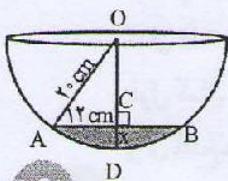
شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید.

(و تکرار کنید ضلع را و قاعده)

$$\Delta O'A \cong \Delta O'B \Rightarrow \begin{cases} O'A = O'B \\ \hat{A}O'O = \hat{B}O'O \end{cases}$$

(الف) چرا $O'A = O'B$ ؟

(ب) چرا $\hat{A}O'O = \hat{B}O'O$ ؟



۳- در کاسه رو به رو مقداری آب ریخته‌ایم.

AB برابر ۲۴ سانتی متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟

$$OC^2 = 20^2 - 12^2 \Rightarrow OC^2 = 400 - 144 \Rightarrow OC^2 = 256 \Rightarrow OC = 16$$

$$x = 20 - 16 = 4 \text{ cm عمق آب}$$

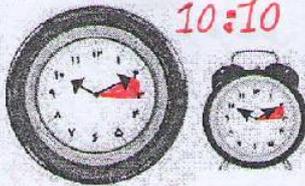
زاویه های مرکزی

فعالیت



10:15

۳۰ درجه

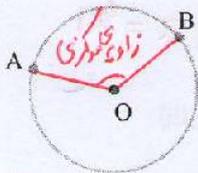


۱- ساعت های روبه رو چه زمانی را نشان می دهند؟

پنج دقیقه بعد، هر یک از ساعت ها چه زمانی را نشان می دهد؟

در این مدت، عقربه دقیقه شمار چند درجه حرکت کرده است؟ $\Rightarrow 360 \div 12 = 30$

در هر یک از ساعت ها مسیر حرکت عقربه دقیقه شمار را رنگ کنید. نوک کدام عقربه مسیر



طولانی تری را طی کرده است؟ **ساعت دیواری**

۲- الف) دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده اند.

کمان کوچک تر را با \widehat{AB} نمایش می دهیم و آن را کمان AB می نامیم.

آیا ممکن است دو نقطه، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید.

ب) مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.

زاویه AOB زاویه مرکزی روبه رو به کمان AB نامیده می شود.

کمان AB نیز روبه رو به زاویه مرکزی AOB است.

۳- شکل روبه رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.

زاویه O_۱ چه کسری از ۳۶۰ درجه است؟

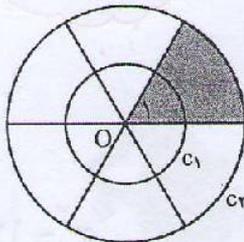
$$\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$$

کمان روبه رو به O_۱ در دایره C_۱ چه کسری از دایره C_۱ است؟

کمان روبه رو به O_۱ در دایره C_۲ چه کسری از دایره C_۲ است؟

آیا این دو کسر با هم مساوی اند؟ **بله**

آیا طول این دو کمان مساوی است؟ **خیر، اولی ۱/۱۰ از دایره C_۱ و دومی ۱/۱۰ از دایره C_۲ است**

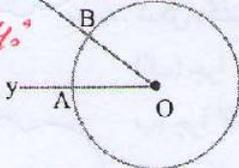


اندازه کمان AB برابر است با اندازه زاویه مرکزی روبه رو به آن. بنابراین، ممکن است دو

کمان با اندازه های مساوی، طول های متفاوتی داشته باشند.

۴- چرا در فعالیت (۳) اندازه کمان روبه رو به O_۱ در هر یک **هر دایره با هر شعاعی ۳۶۰ است و این روی**

از دایره های C_۱ و C_۲ برابر ۶۰ درجه است؟ **۱/۱۰ دایره است پس هر کدام ۶۰ می باشند**



۵- در شکل رو به رو زاویه xOy برابر ۳۶ درجه است.

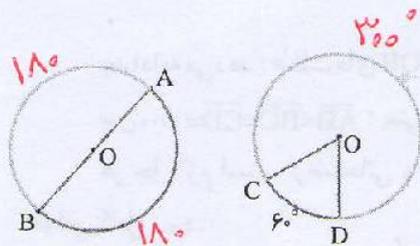
کمان AB چند درجه است؟ $\widehat{AB} = xOy = 36^\circ$

طول کمان AB چه کسری از دایره است؟ $\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$

برای پاسخ دادن به این پرسش از تساوی روبه رو کمک بگیرید.

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{م محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ}$$

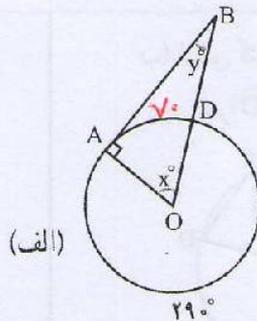
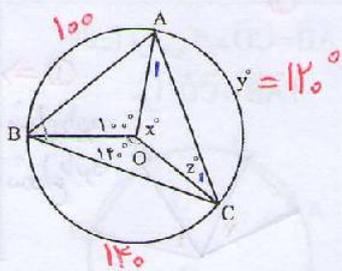
کار در کلاس



۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است. اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.

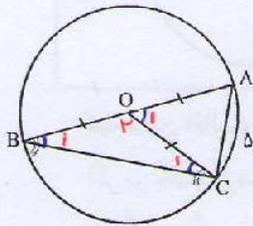
۲- اندازه کمان و زاویه های مجهول را پیدا کنید.

$y = 360 - (100 + 140)$
 $\Rightarrow y = 120^\circ = x = 120^\circ$
 $OA = OC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 30^\circ$
 $\hat{A}_1 + \hat{C}_1 = 180 - 120 = 60^\circ \uparrow$ (ب)

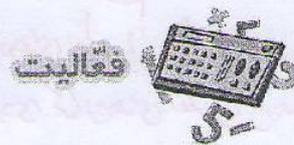


$x = \widehat{AD} \Rightarrow$
 $x = 70^\circ \Rightarrow y = 90 - 70$
 $\Rightarrow y = 20^\circ$

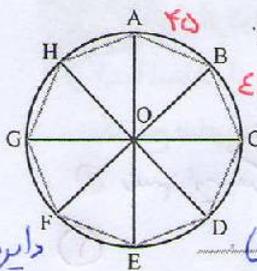
۳- در شکل روبه رو، AB قطر دایره است. زاویه B چند درجه است؟



$\hat{O}_1 = \widehat{AC} = 50^\circ$
 $\Rightarrow \hat{O}_2 = 180 - 50 = 130^\circ$
 $OB = OC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 25^\circ$
 $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 - 130 = 50^\circ \uparrow$



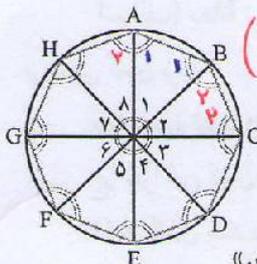
$360 \div 8 = 45$



۱- محیط دایره روبه رو را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده ایم. می خواهیم بدانیم چرا هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است. رضا برای اثبات این مطلب دلایل زیر را بیان می کند: «مثلث های AOB، BOC، COD و... متساوی الساقین اند.

دایره من باشند

چرا؟ $OA = OB = OC = OD = OE = OF = OG = OH$ (شعاع های برابر) و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \dots$ پس همه زاویه های سبز رنگ با هم برابرند.



چرا؟ $(\hat{O}_1 = 45^\circ, OA = OB) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 47.5^\circ$ پس همه زاویه های هشت ضلعی با هم برابرند. چرا؟

آرش می گوید: «ولی این تنها برابری زاویه ها را نشان می دهد و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع های هشت ضلعی پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.»

$(\hat{O}_2 = 45^\circ, OB = OC) \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2 = 47.5^\circ$

پس تمام زاویه های سبز رنگ با هم مساوی می باشند

$A = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A} = 2 \times 47.5 = 95^\circ$

به همین ترتیب داریم $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \dots = \hat{H} = 95^\circ$

ارامه

بعد ادامه می دهد: «مثلث های AOB, BOC, COD و... هم نهشت اند. در چه حالتی؟ (هنر، ذهن)»

پس... $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots$ ؛ یعنی ضلع های هشت ضلعی هم مساوی اند.

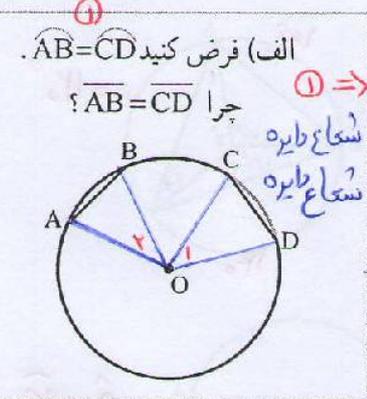
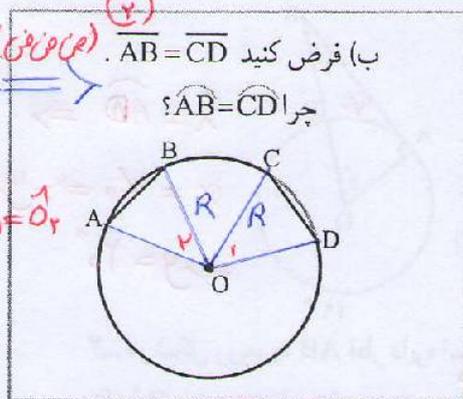
هر جا لازم است، توضیحاتی به دلایل رضا و آرش اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن هشت

ضلعی کامل شود.

۲- برای هر مورد دلیل بیاورید. کلامی

② $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$
 $OA = OD = R$
 $OB = OC = R$

$\triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$
 $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$

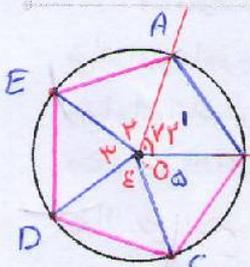


① $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$
 $\left. \begin{array}{l} OA = OD \\ OC = OB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle COD$
 $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید.

اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد، اندازه وترهای نظیر آن ها نیز با هم برابر خواهد بود
 به عکس، اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد، اندازه کمان های نظیر آن ها نیز با هم برابر است

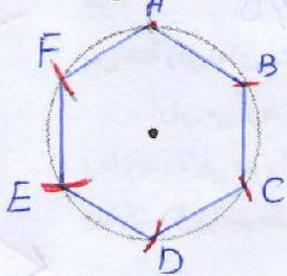
کار در کلاس



۱- با استفاده از خط کش و نقاله، در دایره روبرو یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید. اندازه هر کمان 72° است. $360 \div 5 = 72$
 رسم زاویه مرکزی 72° درجه
 $\hat{AOB} = 72^\circ$
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \dots = \hat{O}_5 = 72^\circ$

۲- الف) دهانه برگار را به اندازه شعاع دایره زیر باز کنید. از یک نقطه دایره، شروع کنید و

بی دربی کمان بزنید.



ب) بدین ترتیب، دایره به چند کمان تقسیم می شود؟
 ج) چرا این کمان ها با هم مساوی اند؟ زیرا $AB = BC = \dots = AF$
 د) هر کمان چند درجه است؟ $360 \div 6 = 60^\circ$
 ه) چند کمان 120° درجه در شکل دیده می شود؟

$\widehat{AC} = \widehat{BD} = \widehat{CE} = \widehat{DF} = \widehat{EA} = \widehat{FB} = 120^\circ$

زیرا اگر در یک دایره اندازه وترها مساوی باشد آن گاه کمان های نظیر آن ها

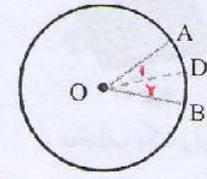
نیز با هم مساوی هستند

جواب سؤال ۴ الف) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AC} = \widehat{AD} = \widehat{BC}$ ①

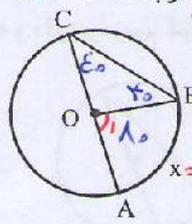
ب) بله، می دانیم اگر چند کمان با هم مساوی باشند آن کمان وترهای نظیر آن کمان ها نیز با هم مساوی اند

① $\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AC} = \widehat{AD} = \widehat{BC}$

($\hat{O}_1 = 90^\circ, OB = OC$) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$
 ($\hat{O}_2 = 90^\circ, OA = OC$) $\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$



۱- OD نیمساز زاویه مرکزی AOB است و $\angle AOB = 36^\circ$
 اندازه هر یک از کمان های AD و BD چند درجه است؟ 18°
 ۲- کمان AB برابر x درجه است. $36 \div 2 = 18 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 18^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB} = 18^\circ$



برای زاویه مرکزی $\hat{O}_1 = \hat{B} + \hat{C}$
 $OB = OC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$
 $\hat{C} = \frac{x}{2} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$

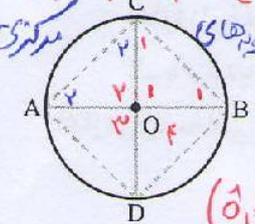
در نظر بگیرید $x = 180$
 بهترین است با عدد دلخواه شود

۳- متحرکی از نقطه A روی دایره ای به شعاع یک سانتی متر شروع به حرکت می کند. در هر شکل، کمان طی شده مشخص شده است. جدول را کامل کنید.

					شکل
۱	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	کسر طی شده از دایره
360°	270°	180°	135°	90°	اندازه کمان طی شده
2π	$\frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2} = \pi$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{4}$	طول تقریبی کمان طی شده

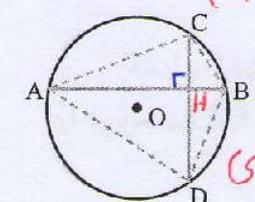
۴- قطرهای AB و CD بر هم عمودند. $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BD} = \widehat{AD} = \widehat{AC}$

مرکزی با هم برابرند



الف) چرا کمان های AC، CB، BD، DA با هم مساوی اند؟ چون زاویه های مرکزی با هم برابرند.
 ب) آیا وترهای AC، CB، BD، DA نیز با هم مساوی اند؟ بله
 ج) آیا زاویه های چهارضلعی AD BC با هم مساوی اند؟ چرا؟ بله
 د- در شکل روبرو وترهای AB و CD بر هم عمودند.

$\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$
 $\hat{B} = \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$



الف) آیا کمان های AC، CB، BD، DA با هم مساوی اند؟ خیر
 ب) پاسختان را با پاسخ تمرین قبل مقایسه کنید.
 این دو تمرین چه تفاوتی دارند؟ در تمرین قبل دو وتر قطرهای

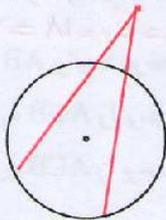
دایره بودند و در مرکز دایره را قطع کردند ولی اینجا وترها قطر نیستند و زاویه ای \hat{H} یک زاویه مرکزی نیست

زاویه‌های محاطی

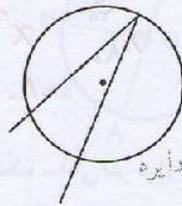
فعالیت



۱- مانند نمونه رسم شده (الف)، در شکل‌های زیر نمونه‌ای از هر یک از وضعیت‌های مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید.



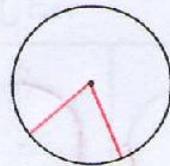
ب) رأس زاویه خارج دایره



الف) رأس زاویه روی دایره



د) رأس زاویه داخل دایره در نقطه‌ای غیر از مرکز

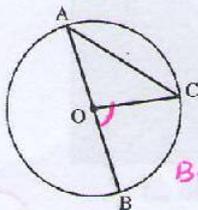


ج) رأس زاویه در مرکز دایره

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟ (ج)

به زاویه‌ای که در شکل «الف» مشاهده می‌کنید، زاویه محاطی گفته می‌شود. رأس این زاویه روی دایره است و ضلع‌های آن، دایره را قطع کرده‌اند.

زاویه محاطی



۲- اندازه زاویه مرکزی BOC را برحسب \widehat{BC} بنویسید: $\widehat{BOC} = \widehat{BC}$

چرا زاویه‌های A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟ $OA = OC$

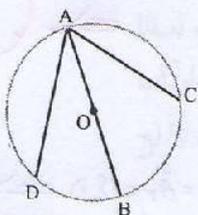
چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟ $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{C}$

اندازه زاویه محاطی BAC را برحسب \widehat{BC} بنویسید. $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

۳- با توجه به فعالیت قبل، با پر کردن جاهای خالی

اندازه زاویه محاطی DAC را برحسب \widehat{DC} بنویسید.

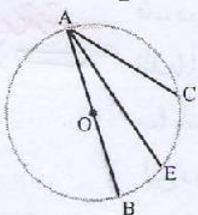
$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$



۴- با پر کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی EAC

را هم برحسب \widehat{EC} بنویسید.

$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} = \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{EC}}{2}$$



۵- پاسخ فعالیت‌های (۲)، (۳) و (۴) را با هم مقایسه کنید. آیا در این سه فعالیت، همه

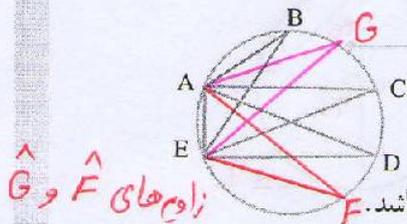
حالت‌های زاویه محاطی بررسی شده‌اند؟ عبارت زیر را کامل کنید. **بله**

اندازه هر زاویه محاطی برابر است با **نصف کمان مقابل به آن**

کار در کلاس



۱- با توجه به شکل روبه‌رو،



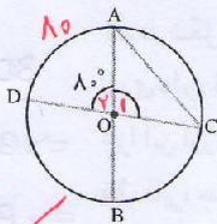
الف) زاویه‌های محاطی مقابل به \widehat{AE} را پیدا کنید. $\hat{D}, \hat{C}, \hat{B}$

ب) دو زاویه محاطی دیگر رسم کنید که \widehat{AE} کمان مقابل به آنها نیز باشد. **زاویه‌های \hat{F} و \hat{G}**

۲- در شکل روبه‌رو، اندازه زاویه محاطی C را تعیین کنید.

دو دانش‌آموز به این سؤال جواب داده‌اند.

راه‌حل‌های آنها را توضیح دهید. **کلامی**



زاویه مرکزی \widehat{AD} مقابلش برابر است
 $\hat{O} = 80^\circ \rightarrow \widehat{AD} = 80^\circ$
زاویه محاطی \hat{C} نصف کمان مقابل
 $\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$
به آن می‌باشد

زهرا $\hat{O}_1 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

\hat{O} مکمل \hat{O}_1 است

$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

مجموع زاویه‌ها در مثلث 180° است

$\hat{A} = \hat{C} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

مثلث OAC متساوی الساقین است

زاویه $\hat{O} = 100^\circ$ است

فعالیت



۱- یک زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

سه زاویه محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید.

فکر می‌کنید چند زاویه دیگر می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

آیا همه این زاویه‌های رسم شده با هم برابرند؟ چرا؟

بله، زیرا اجزای روبه‌روی یک کمان می‌باشند پس نصف کمان AB می‌باشند

۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟ 180° $180^\circ \div 2 = 90^\circ$

چند زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

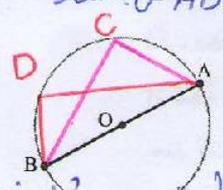
چند زاویه محاطی می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

اندازه این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

نود (90°) درج زیرا نصف کمان مقابلش می‌باشند

$\widehat{AB} = 180^\circ \Rightarrow \text{زاویه محاطی مقابل به آن} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

کمان \widehat{AMB} می‌شمار
نقطه وجود دارد تا با وصل کردن A و B یک زاویه محاطی درست
می‌شود

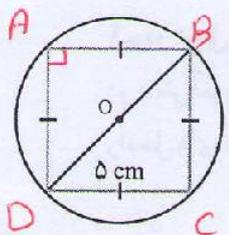
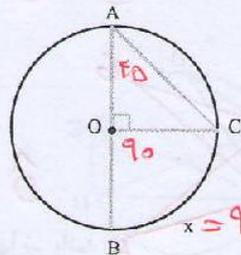
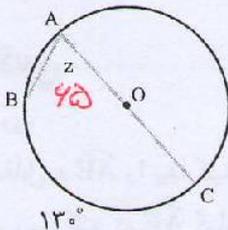
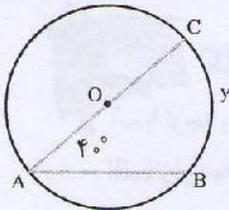


کار در کلاس



۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های خواسته شده را پیدا کنید.

$y = 10$



۲- در شکل روبه‌رو، همه رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر روی دایره قرار دارد.

$BD \text{ قطر} \Rightarrow \widehat{BD} = 180$

چرا این لوزی، مربع است؟

$\Rightarrow \widehat{A} = \frac{180}{2} = 90$

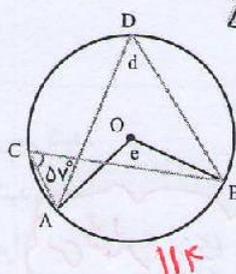
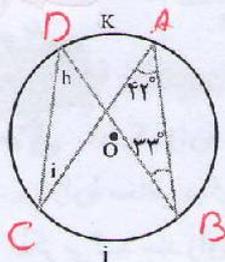
قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

$BD^2 = 5^2 + 5^2$
 $\Rightarrow BD = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2}$
 $\Rightarrow BD = 5\sqrt{2}$

لوزی که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد مربع است.



۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.



$d = c = 57$

$e = \widehat{AB} = 114$

۲- در شکل زیر زاویه مرکزی AOB برابر با ۷۲ درجه است. اندازه کمان AB چند درجه

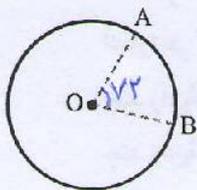
$\widehat{AB} = \widehat{a} = 72$

است؟

اگر، دهانه پرگار را به اندازه AB باز کنیم و با شروع

از نقطه B، بی‌دری کمان‌هایی بزنیم، به این ترتیب

چند کمان مساوی روی دایره جدا می‌شود؟



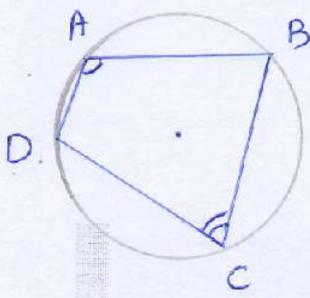
$360 \div 72 = 5$

$j = 2 \times 57 = 114$

$h = \widehat{A} = 57$

$k = 2 \times \widehat{B} = 44$

$i = \widehat{B} = 33$



$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{340}{2} = 170$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 180$$

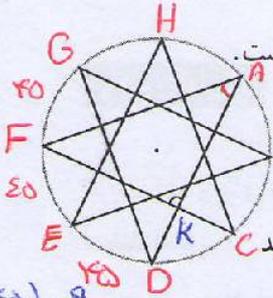
نتیجه: مجموع دو زاویه مقابل هر چهار ضلعی محاط برابر 180 درجه است

$$340 \div 8 = 42.5$$

$$\hat{A} = \frac{FD}{2} = 45$$

$$\hat{F} = 45$$

$$K = 180 - (45 + 45) = 90$$



3- در شکل روبه‌رو، دایره‌ای به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است.

الف) شکل چند خط تقارن دارد؟ **۱ خط تقارن**

ب) اندازه دو زاویه مشخص شده روی شکل را پیدا کنید و بنویسید.

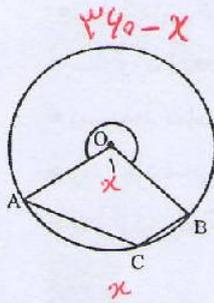
$$\hat{A} = 45 \text{ و } K = 90$$

4- دایره‌ای بکشید. سپس، چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید

که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.

چرا مجموع دو زاویه روبه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر 180 درجه است؟

بالا



5- در شکل روبه‌رو اندازه کمان AB برابر x درجه است.

الف) اندازه زاویه O₁ را بر حسب x بنویسید. **x درجه**

ب) اندازه کمان قرمز رنگ را بر حسب x بنویسید. **340 - x**

ج) اندازه زاویه C را بر حسب x بنویسید.

$$\hat{C} = \frac{340 - x}{2} = 170 - \frac{x}{2}$$

6- در شکل زیر، پرده‌ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخ ایجاد کرده‌اند.

شعاع چرخ 30 سانتی متر است.

$$340 \div 12 = 28.33$$

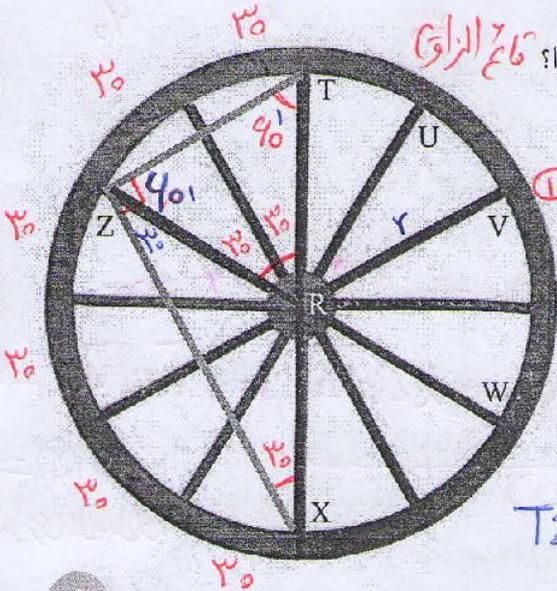
الف) طول TX چقدر است؟ **40 cm (قطر دایره)**

ب) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ **مساوی الاضلاع**

ج) طول ZT چقدر است؟ **40 cm**

د) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ **مابغ الزاوی**

ه) طول ZX چقدر است؟



$$\hat{T}_1 = \hat{Z}_1 = \widehat{TRZ} = 40 \Rightarrow$$

مثلث TRZ مساوی الاضلاع است

$$\Rightarrow TZ = r = 30 \text{ cm}$$

$$\widehat{TZX} = \frac{TX}{r} = \frac{180}{2} = 90 \text{ (چون TX قطر است)}$$

$$\Rightarrow ZX^2 = TX^2 - TZ^2 \Rightarrow ZX^2 = 40^2 - 30^2 = 3400 - 900$$

$$\Rightarrow ZX = \sqrt{2700} = \sqrt{9 \times 100 \times 3} = 30\sqrt{3}$$

●●●●● مرور فصل ۹ ●●●●●

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثال بزنید.

- خط مماس
- زاویه مرکزی
- زاویه محاطی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- پیدا کردن مرکز دایره
- تساوی کمان‌ها و وترهای متناظر
- رسم خط مماس بر دایره
- رسم چندضلعی منتظم به کمک زاویه مرکزی
- پیدا کردن زاویه محاطی با توجه به کمان روبه‌روی آن

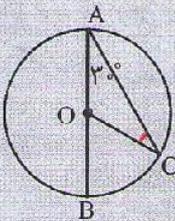
Доплата.iR

کاربرد

رسم چندضلعی‌های منتظم به کمک مفاهیم زاویه مرکزی یکی از کاربردهای مهم این درس در طراحی شکل‌های تزئینی و معماری است.

تمرین‌های ترکیبی

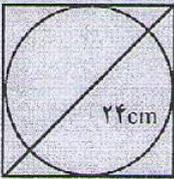
۱- با توجه به شکل روبه‌رو، اندازه زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.



$\hat{C} = 30^\circ, \hat{COB} = 40^\circ, \widehat{BC} = 40^\circ$

$\hat{COB} = \hat{A} + \hat{C}$

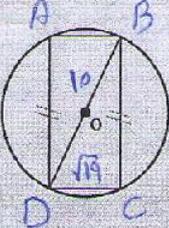
۲- کاغذی مربعی شکل به قطر ۲۴ سانتی متر داریم. مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توانستیم روی آن رسم کردیم. قطر این دایره را حساب کنید.



$x^2 + x^2 = 24^2 \Rightarrow 2x^2 = 576 \Rightarrow$

$x^2 = 288 \Rightarrow x = \sqrt{288} = \sqrt{2} \times \sqrt{144} = 12\sqrt{2}$

اضلاع
چهارضلعی متوازی
است



۳- الف) در شکل زیر ضلع‌های روبه‌رو به هم در چهارضلعی با هم برابرند. چرا چهارضلعی مستطیل است؟
ب) شعاع دایره برابر ۵ و عرض مستطیل برابر $\sqrt{19}$ سانتی متر است. طول مستطیل را به دست آورید.

ABCD مستطیل است
زیر متوازی الاضلاع
که زاویه قائم دارد مستطیل است

$BC^2 = 10^2 - 19^2 \Rightarrow BC^2 = 100 - 19 = 81$

$\Rightarrow BC = \sqrt{81} = 9$