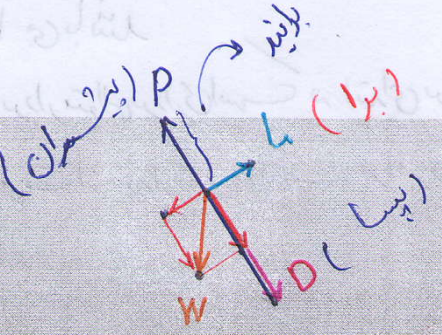
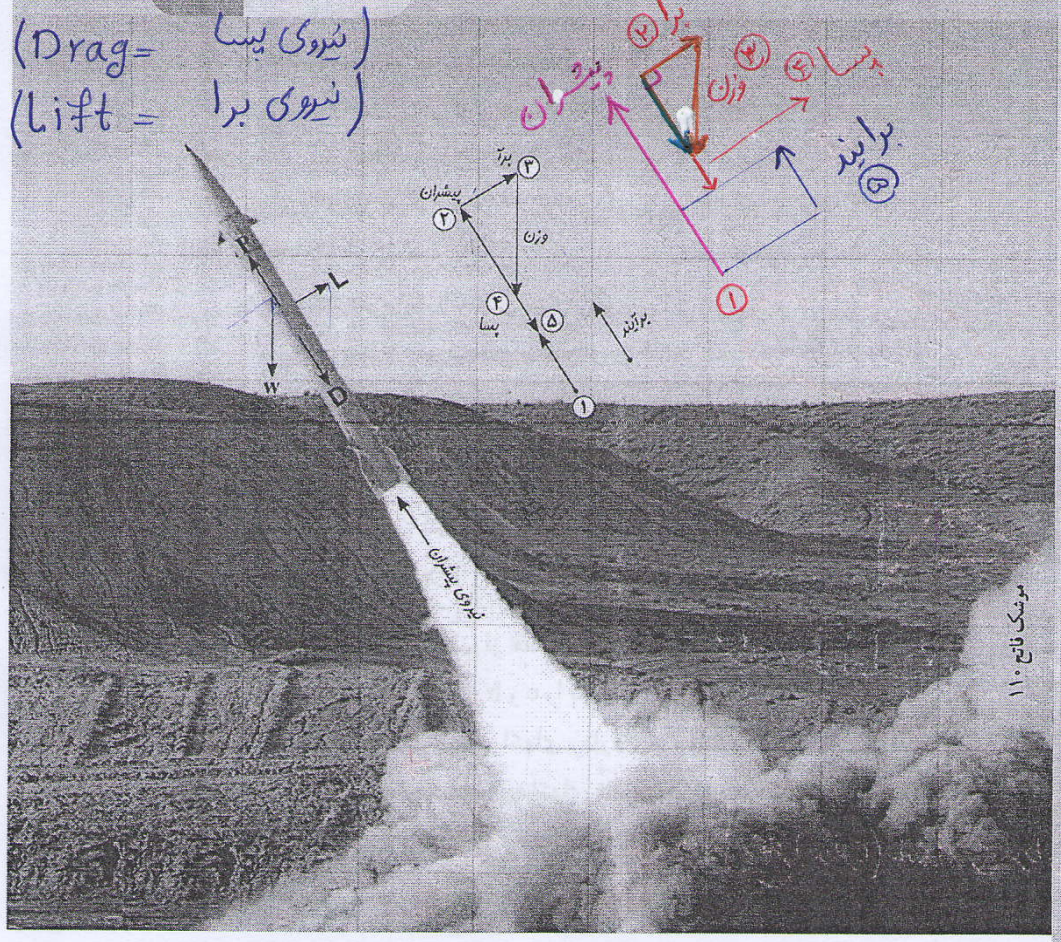
دنیایی از همه چیز
www.Donyaha.ir

(weight = نیروی وزن)
(Thrust = نیروی رانش)
در این کتاب از P استفاده شده




# فصل ۵
# بردار و مختصات

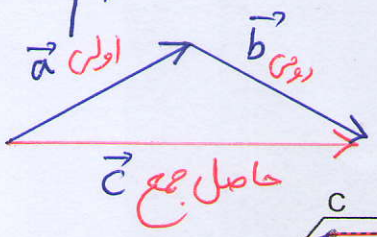
(Drag = نیروی پسا)
(Lift = نیروی برا)




شتاب حرکت یک جسم در هر لحظه همواره در جهت بردار برآیند نیروهای وارد بر آن است. برای مثال وقتی یک موشک شلیک می‌شود، نیروهای وارد بر آن عبارتند از، نیروی وزن، نیروی پیشران، نیروی مقاوم هوا در راستای حرکت موشک (پسا) و نیروی برآ (عمود بر راستای حرکت)؛ به‌طوری که برآیند این نیروها باعث حرکت موشک است.

برآیند: چون بردار c کار دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با هم انجام می‌دهد پس بردار c برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌باشد

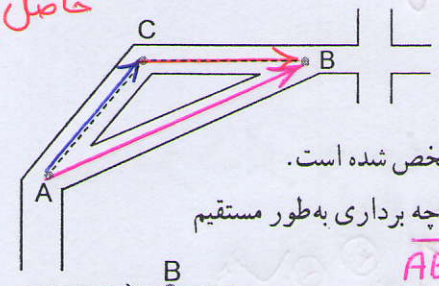
حاصل جمع دو بردار متوالی: حاصل جمع دو بردار متوالی برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند (جهت از بردار اول به سمت بردار دوم)




## جمع بردارها

### فعّالیت

۱ــ شخصی در نقطهٔ A ایستاده است.

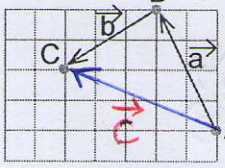



مسیر حرکت او برای رسیدن به نقطهٔ B در شکل مشخص شده است.

این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به‌طور مستقیم به نقطهٔ B می‌رسد؟ آن را رسم کنید. بردار $\overrightarrow{AB}$

بالا

۲ــ نقطهٔ A ابتدا با بردار انتقال a به نقطهٔ B و سپس با بردار انتقال b به نقطهٔ C منتقل شده است. نقطهٔ A با چه برداری به‌طور مستقیم به نقطهٔ C منتقل می‌شود؟ $\overrightarrow{AC}$



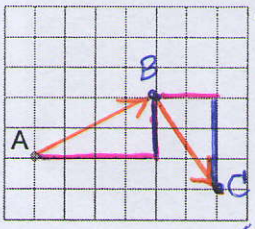

نام آن را بردار c بگذارید. آیا می‌توانیم بگوییم بردار c کارِ دو بردار انتقال a و b را انجام می‌دهد؟ بله $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

به بردار c بردار برآیند یا حاصل جمع می‌گویند.

بازی در کلاس

۳ــ روباتی فقط به‌صورت افقی یا عمودی حرکت می‌کند.

این روبات اکنون روی نقطهٔ A است. با فرمان $\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}$ ابتدا ۴ واحد به سمت راست (افقی) و سپس ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می‌کند. نقطهٔ جدید را B نام‌گذاری کنید.

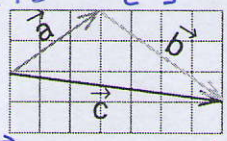



روبات ما با فرمان $\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ از B به نقطهٔ C می‌رسد.

با چه فرمانی به‌طور مستقیم از نقطهٔ A به C می‌رسد؟ فرمان $\begin{bmatrix}۶\\-۱\end{bmatrix}$

$\vec{a}=\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}, \vec{b}=\begin{bmatrix}۴\\-۳\end{bmatrix}, \vec{c}=\begin{bmatrix}۷\\-۱\end{bmatrix}$

۴ــ مختصات بردارهای a، b و c را بنویسید. آیا بردار c با جمع دو بردار a و b برابر است؟ به ابتدا و انتهای بردارهای a و b توجه کنید.




بله

در چه صورت برداری که از ابتدای $\vec{a}$ به انتهای $\vec{b}$ رسم می‌شود، بردار c، حاصل جمع بردارهای a و b است؟ توضیح دهید. بردار حاصل جمع (برآیند): ابتدایش بردار $\vec{a}$ و انتهایش بردار $\vec{b}$ است

در فعّالیت ۲ مشاهده کردید که نتیجهٔ جمع دو بردار a و b، بردار c است. بنابراین، می‌توان یک تساوی برداری به‌صورت $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ را نوشت.

با توجه به تساوی $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ می‌توان مختصات بردار c را از تساوی مختصاتی زیر به‌دست آورد:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_{\vec{a}}+\begin{bmatrix}z\\t\end{bmatrix}_{\vec{b}}=\begin{bmatrix}x+z\\y+t\end{bmatrix}_{\vec{a}+\vec{b}}$$

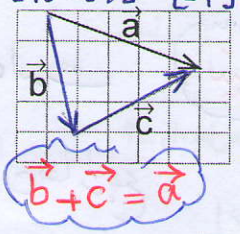
۷۰ نتیجه: بردار $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ برداری است که مختصاتش برابر مجموع مختصات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است

Donyaha.iR

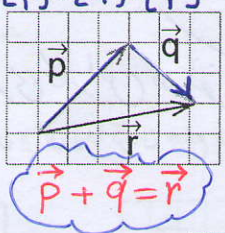
## کار در کلاس

در فعّالیت قبل دیدید که اگر دو بردار a و b به‌صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد، برای رسم حاصل جمع یا برآیند این دو بردار می‌توانیم برداری از ابتدای بردار a به انتهای بردار b رسم کنیم.

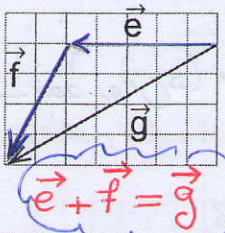
ابتدا مشخص کنید کدام بردار، حاصل جمع دو بردار دیگر است. سپس برای هر شکل، یک جمع‌برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



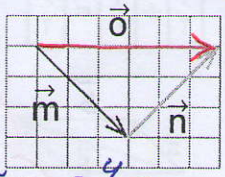

$\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$



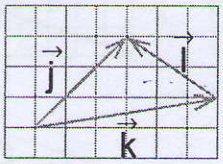

$\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$




$\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\-4\end{bmatrix}$



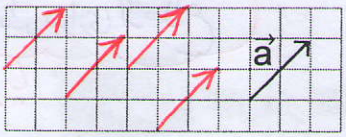

$\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$




$\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$

## فعّالیت

۱ــ چهار بردار مساوی بردار a رسم کنید و مختصات همهٔ بردارها را بنویسید.

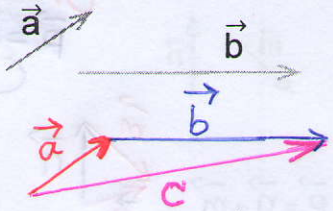


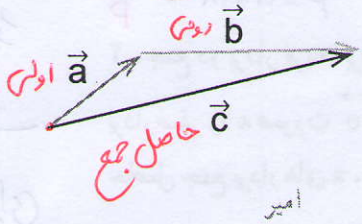

$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

Donyaha.iR

۲ــ با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می‌توان از نقطه‌های شروع مختلف رسم کرد، می‌خواهیم حاصل جمع بردارهای a و b را رسم کنیم.

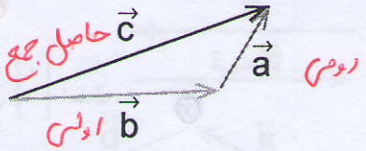
راه‌حل‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.




امیر

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$




رضا

$\vec{b}+\vec{a}=\vec{c}$



امیر ابتدا از یک دلخواه برداری مساوی بردار $\vec{a}$ رسم کرده و سپس از انتهای آن برداری مساوی بردار $\vec{b}$ رسم کرده، ولی رضا ابتدا بردار $\vec{b}$ را رسم کرده و از انتهای آن برداری مساوی بردار $\vec{a}$ رسم کرده

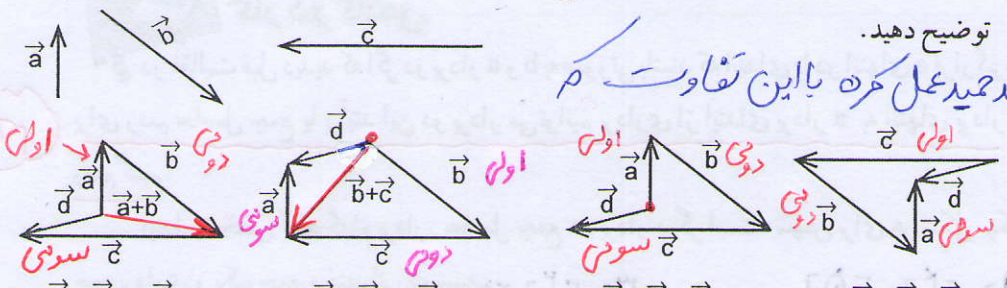
نتیجه: حاصل جمع دو بردار خاصیت جابجایی دارد

سعید: ابتدا حاصل جمع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بدست آورده و سپس حاصل آن دو را با بردار $\vec{c}$ جمع کرده است

محمد: ابتدا مجموع دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را محاسبه کرده و سپس حاصل آن دو را با بردار $\vec{a}$ جمع کرده است

حمید: حمید سه بردار را به صورت متوالی، ابتدا $\vec{a}$ و پس از آن $\vec{b}$ و در انتها $\vec{c}$ را رسم کرده و برای بدست آوردن مجموع ابتدای اولی را به انتهای سومی وصل کرده است

۳ــ دانش‌آموزان برای پیدا کردن جمع سه بردار راه‌حل‌های زیر را ارائه کرده‌اند. هر کدام را توضیح دهید.

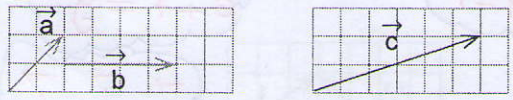



$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ سعید — $(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}$ محمد — $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ حمید — $\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}$ رضا

رضا: رضا هم مانند حمید عمل کرده با این تفاوت که حمید ابتدا بردار $\vec{c}$ و سپس بردار $\vec{b}$ و در آخر بردار $\vec{a}$ را رسم کرده است

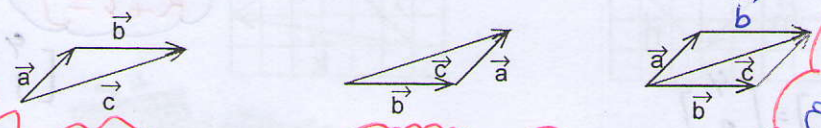
نتیجه: نتیجه‌ی کار این سه نفر یکی است فقط روش‌ها متفاوت است

۴ــ راه‌حل‌های دانش‌آموزان برای پیدا کردن جمع دو بردار a و b را مشاهده و مقایسه کنید.



$$\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴\\۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\۲\end{bmatrix}$$

سمانه



قاطمه — زهرا — مریم

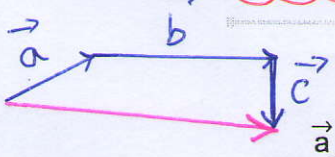
اول $\vec{a}$ و سپس به دنبال آن $\vec{b}$

اول b و به دنبال آن بردار $\vec{a}$ رسم شده است

سمانه مختصات آن‌ها را جمع کرده است

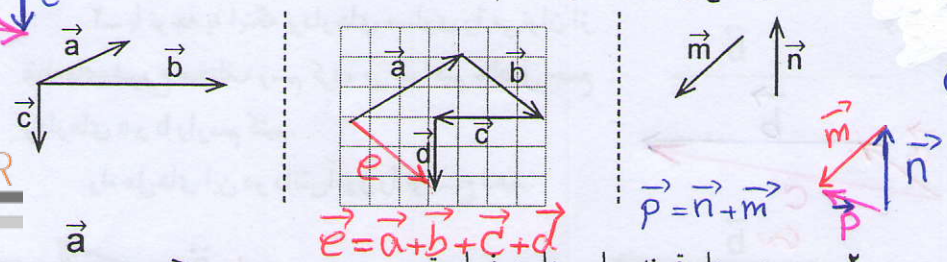
روش متوازی الاضلاع: رسم هر دو بردار با مبدا مشترک و رسم قطر متوازی الاضلاع

حاصل جمع دو بردار با مبدا مشترک: روی دو بردار یک متوازی الاضلاع درست می‌کنیم قطری که از راس دو بردار رسم می‌شود حاصل جمع دو بردار است (ابتدای بردار حاصل جمع ابتدای دو بردار است)



## کار در کلاس

۱ــ حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

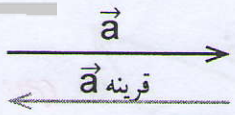


$\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

$\vec{p}=\vec{n}+\vec{m}$

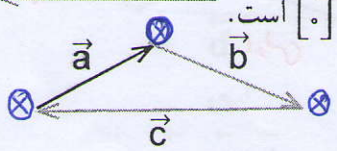
Donyaha.iR

۲ــ جمع دو بردار قرینه، برابر بردار صفر است.




بردار صفر را به صورت $\vec{o}$ نشان می‌دهیم و مختصات آن $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ است.

حاصل جمع بردارهای a ، b و c چیست؟ چرا؟

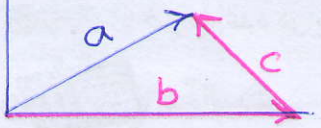


$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$

بردار $\vec{c}$ کار بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را خنثی کرده در واقع بردار $\vec{c}$ قرینه‌ی مجموع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌باشد یا به عبارتی دیگر جسم در مجموع این سه انتقال به محل اول خود برگشته و می‌توان گفت مجموع این سه انتقال صفر است

نکته: ① بی شمار بردار می توان رسم کرد که حاصل جمع آن ها بردار معلوم $\vec{a}$ باشد

② بی شمار متوازی الاضلاع می توانیم رسم کنیم که $\vec{a}$ قطر آن ها باشد



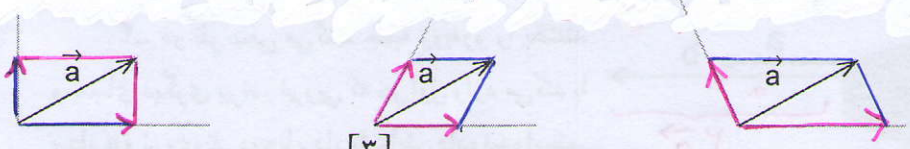

$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$

## فعالیت

۱ــ دو بردار رسم کنید که جمع آنها بردار a باشد. به این کار تجزیه بردار می گویند.

بالا

چند پاسخ مختلف می‌توان به‌دست آورد؟ چرا؟ بی شمار، به خاطر اینکه




۲ــ مختصات دو بردار را که حاصل جمعشان بردار $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ باشد، بنویسید.

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید. به کمک هم، سه پاسخ مختلف دیگر بنویسید. فکر می‌کنید این مسئله چند پاسخ دارد؟ بی شمار جواب دارد، باز پاسخ است

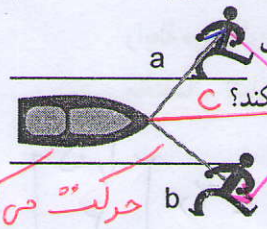
$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

## تمرین

۱ــ دو نفر در کنار رودخانه با دو طناب قایقی را در خلاف جهت آب می کشند. الف) قایق به کدام سمت حرکت می کند؟

ب) اگر نیروی a بیشتر باشد، قایق به کدام طرف متمایل می‌شود؟



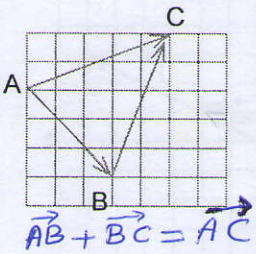

به سمت بالا حرکت می‌کند

الف) روی مسیر c که برایند دو نیروی a و b هست حرکت می کند

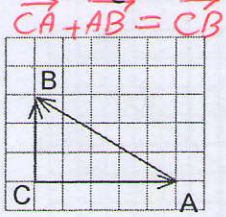
برایند دو نیرو به سمت بالا است

۲ــ در هر شکل یکی از بردارها حاصل جمع بردارهای دیگر است.

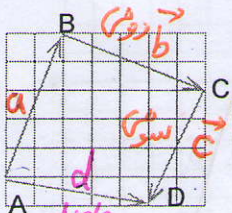
برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.




$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$




$\vec{CA}+\vec{AB}=\vec{CB}$




$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{AD}$

$$\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$$

۳ــ در هر تساوی، x و y را به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

$x=2-5=-3$

$y=-1-6=-7$

$$\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\y\end{bmatrix}$$

$x=7-3=4$

$y=-4-2=-6$

$$\begin{bmatrix}x+1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\y-1\end{bmatrix}$$

$x+1=-1 \Rightarrow x=-2$

$y-1=5 \Rightarrow y=6$

نتیجه: حاصل جمع چند بردار متوالی برابر برداری است که ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار وصل می‌کند



Donyaha.iR

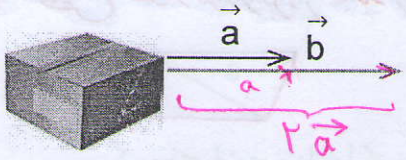
نکته: بردار $k\vec{a}$ برداری است هم راستا با بردار $\vec{a}$ و اندازه‌ی آن $k$ برابر اندازه‌ی بردار $\vec{a}$ است
اگر $k>0$ باشد دو بردار هم جهت و اگر $k<0$ باشد دو بردار مختلف الجهت می‌باشند

$-3\vec{a}$

## ضرب عدد در بردار

فعالیت

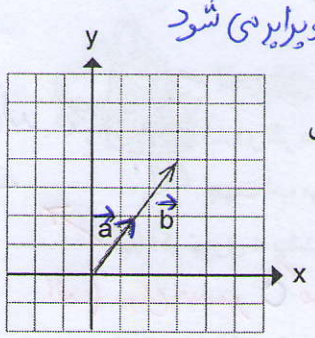
۱ــ در اینجا بردار حرکت یک خودرو در جاده رسم شده است. اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کرده باشد، بردار حرکت جدید را رسم کنید. برداری سه برابر $\vec{a}$ و در جهت مخالف آن رسم می‌کنیم




۲ــ دو نفر سعی می‌کنند جعبه روبه‌رو را بکشند و به‌جای دیگری ببرند. نیرویی که نفر اول وارد می‌کند با بردار a و نیروی نفر دوم با بردار b نمایش داده شده است. با توجّه به شکل، نیروی نفر دوم چند برابر نیروی نفر اول است؟ چرا؟ تقریبا دوبرابر چون اندازه‌ی آن تقریبا دوبرابر $\vec{a}$ هست و هم جهت می‌باشند

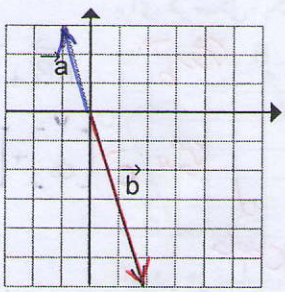
۳ــ در فعالیت‌های ۱ و ۲، هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازهٔ آن، چه نکاتی را رعایت کردید؟ راستاها یکی است در اولی جهت ها مخالف هم و در دومی هم جهت می‌باشند، در اولی اندازه سه برابر و در دومی اندازه دوبرابر می‌شود

۴ــ در هر شکل مختصات بردارهای a و b را بنویسید.
رابطهٔ دو بردار a و b را با یک تساوی برداری و یک تساوی مختصاتی نشان دهید.




$\vec{b}=2\vec{a}$ یا $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}$

$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}1.5\\2\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}1,5\\2\end{bmatrix}$

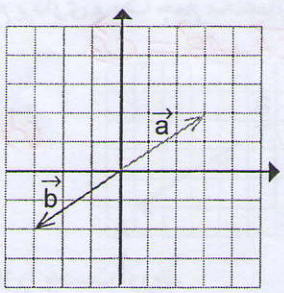



$\vec{b}=-2\vec{a}$

$\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

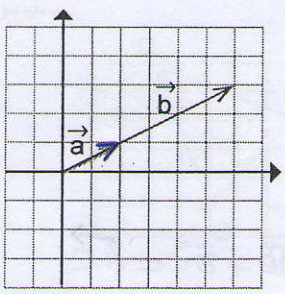
تساوی برداری

تساوی مختصاتی




$\vec{b}=-\vec{a}$

$\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$




$\vec{b}=3\vec{a}$

$\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}=3\times\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$



Donyaha.iR

نتیجه گیری

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.
بنابراین، می‌توانیم بنویسیم :

$$k\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx\\ky\end{bmatrix}$$

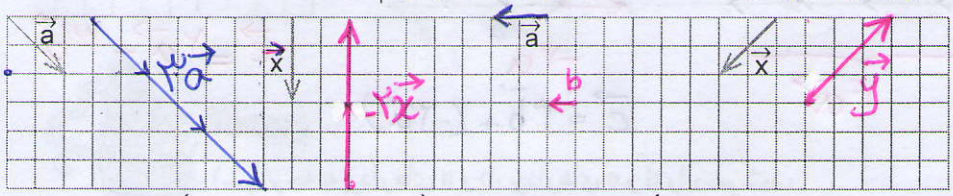
اگر بردار b قرینهٔ بردار a باشد، می‌نویسیم : $\vec{b}=(-1)\vec{a}$ یا $\vec{b}=-\vec{a}$

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\rightarrow\vec{b}=-\vec{a}=\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$$

Donyaha.iR

## کار در کلاس

با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.



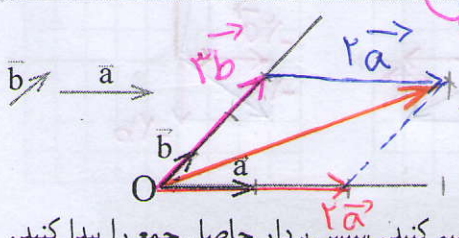

$\vec{b}=3\vec{a}$ | $\vec{y}=-2\vec{x}$ | $\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}$ | $\vec{y}=-\frac{3}{2}\vec{x}$

ترکیب خطی

## فعّالیت

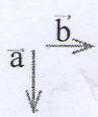
۱ــ بردارهای a و b مفروض‌اند.

بردار $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ را رسم کنید.

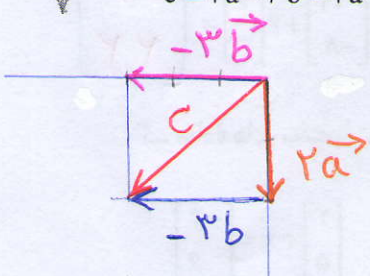



از نقطهٔ دلخواه O بردارهای ۲a و ۳b را رسم کنید. سپس بردار حاصل جمع را پیدا کنید.

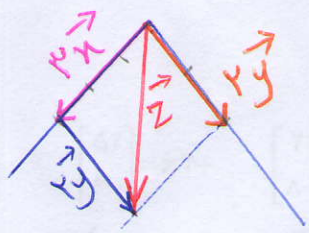
۲ــ بردارهای خواسته شده را رسم کنید.




$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}=2\vec{a}+(-3\vec{b})$



$\vec{z}=3\vec{x}+2\vec{y}$





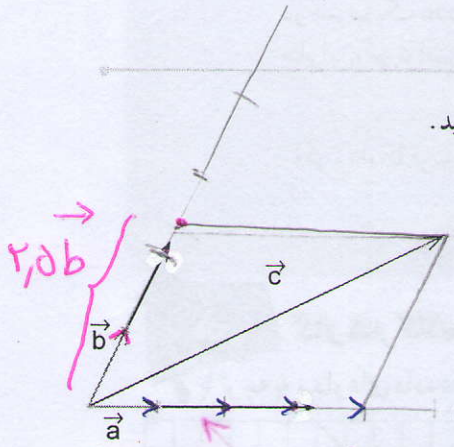

نکته

برای رسم بردار $(\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b})$، ابتدا از یک نقطه‌ی دلخواه بردار $k\vec{a}$ را هم راستا با بردار $\vec{a}$ و k برابر آن رسم می‌کنیم و سپس از همان نقطه بردار $l\vec{b}$ را هم راستا با بردار $\vec{b}$ رسم می‌کنیم به روش متوازی الاضلاع بردار $\vec{c}$ را بدست می‌آوریم

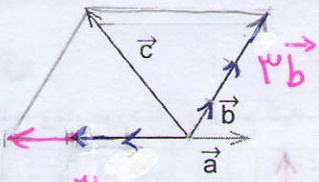
اصلاح مرور

## کار در کلاس

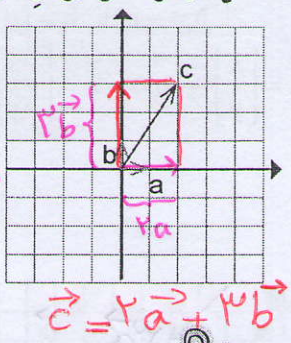
در هر شکل، بردارِ c را برحسب بردارهای a و b بنویسید.




$\vec{c} = 4\vec{a} + 2{,}5\vec{b}$



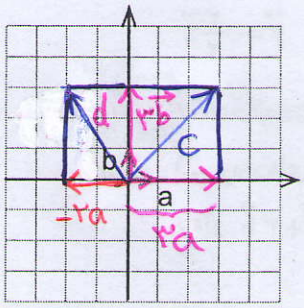

$\vec{c} = 3\vec{b} + (-3\vec{a})$




$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

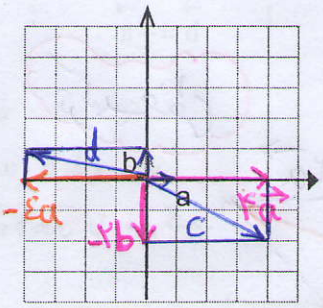
## تمرین

۱ــ با توجه به بردارهای a و b، بردارهای c و d را رسم کنید.



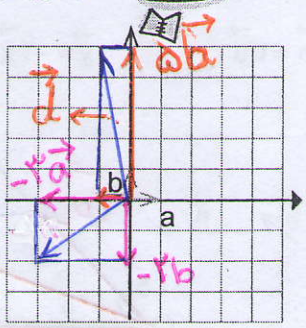

$\vec{c} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$

$\vec{d} = (-2)\vec{a} + 3\vec{b}$




$\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$

$\vec{d} = -4\vec{a} + \vec{b}$




$\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$

$\vec{d} = -\vec{a} + 5\vec{b}$

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$(-1)\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\-10\end{bmatrix}$ $(-4)\begin{bmatrix}-5\\7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18\\-27\end{bmatrix}$ $(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix}12\\-8\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}36\\22\end{bmatrix}$

۳ــ معادله‌های مختصات زیر را حل کنید.

$4x = \begin{bmatrix}12\\-8\end{bmatrix}$ $-3x = \begin{bmatrix}15\\-9\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix}-5\\3\end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix}-2\\-5\end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix}-6\\+1\end{bmatrix}$



Donyaha.iR

نکته: اگر نیروی $\vec{a}$ از عکس‌العمل زمین بیشتر باشد جسم داخل سطح شیب‌دار فرو می‌رود

اگر نیروی عکس‌العمل زمین از نیروی $\vec{a}$ بیش‌تر باشد جسم به سمت هوا پرتاب می‌شود

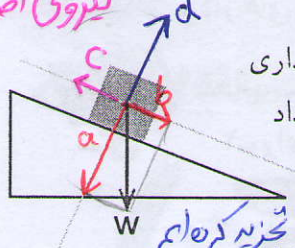
طبق قانون دوم نیوتن این دو نیرو یکدیگر را خنثی می‌کنند

اگر نیروی اصطکاک زیاد باشد آن‌گاه نیروی $\vec{b}$ خنثی می‌شود و جسم حرکت نمی‌کند

## مثال کاربردی

نکته: هرچه قدر شیب بیش‌تر باشد مولفه‌ی نیروی $\vec{b}$ بیش‌تر می‌شود و جسم سریع‌تر حرکت می‌کند

نیروی اصطکاک




۴ــ در شکل روبه‌رو نیروی وزن جعبه، که روی سطح شیب‌داری قرار گرفته، نشان داده شده است. این بردار را روی دو امتداد رسم شده تجزیه کنید. بردار وزن $\vec{w}$ را به دو بردار $\vec{a}$ عمود بر سطح و $\vec{b}$ در راستای سطح شیب‌دار تجزیه کرده‌ایم بردار $\vec{a}$ با عکس‌العمل سطح خنثی می‌شود (قانون دوم نیوتن) پس جسم در راستای بردار $\vec{b}$ به سمت پایین حرکت می‌کند

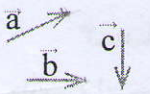
۵ــ با توجه به بردارهای a و b ، مختصات بردار c را به‌دست آورید.

$\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \vec{b}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ $\quad \vec{a}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \vec{b}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\quad \vec{a}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \vec{b}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$ $\quad \vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ $\quad \vec{c}=-3\vec{a}+4\vec{b}$

$\vec{c}=\begin{bmatrix}2+4\\1-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix}$ $\quad \vec{c}=\begin{bmatrix}2+0\\0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ $\quad \vec{c}=\begin{bmatrix}-3+0\\0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$

۶ــ با توجه به بردارهای a و b و c ، بردار d را رسم کنید.



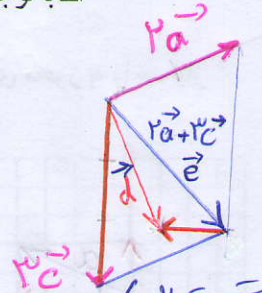

$\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ $\quad \vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$

$\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{c})=\vec{d}$

$2\vec{a}+3\vec{c}=\vec{e}$

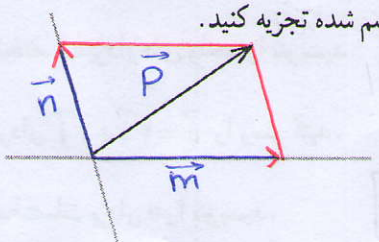
$\vec{e}+(-\vec{b})=\vec{d}$

روش اول

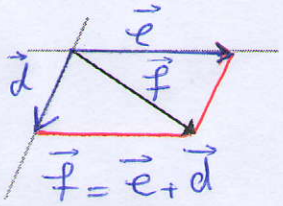



روش دوم (به صورت متوالی)

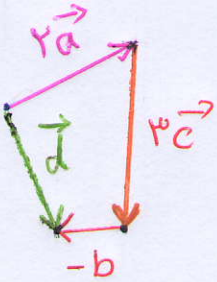
۷ــ بردارهای داده‌شده را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.

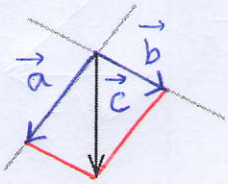


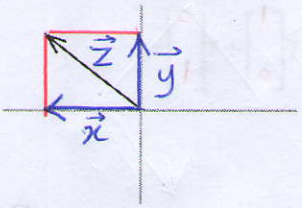

$\vec{p}=\vec{n}+\vec{m}$




$\vec{f}=\vec{e}+\vec{d}$






Donyaha.iR

## بردارهای واحد مختصات

### فعالیت

۱ــ برای اندازه‌گیری هر یک از مقدارهای زیر از چه واحدی استفاده می‌کنیم؟

زمان : ثانیه

زاویه : درجه

دما : درجه سانتی‌گراد

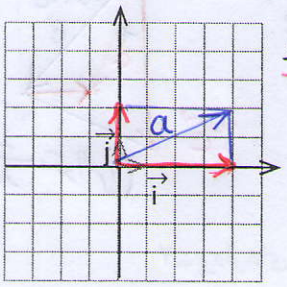
جرم : کیلوگرم

طول : متر

۲ــ در محور زیر، واحد را نشان داده‌ایم. عددهای ۲ و ۱ــ را روی محور مشخص کنید.

۳ــ همان‌طور که ملاحظه کردید، برای اندازه‌گیری و نمایش عددها روی محور به واحد نیاز داریم. برای نمایش بردار نیز به واحد نیازمندیم. این واحد باید از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحهٔ مختصات با دو محور نمایش داده می‌شود، به واحد روی هر دو محور نیاز داریم.

در شکل روبه‌رو، بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده‌اند.




- مختصات بردارهای واحد را بنویسید. $\vec{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ , $\vec{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
- بردار $\vec{a}=4\vec{i}+2\vec{j}$ را رسم کنید.
- مختصات بردار a را بنویسید. $a=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$
- مختصات بردار a را از رابطهٔ زیر به‌دست آورید.

$$\vec{a}=4\vec{i}+2\vec{j}=4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=$$

$$\vec{a}=p\vec{i}+q\vec{j}\Rightarrow\vec{a}=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$$



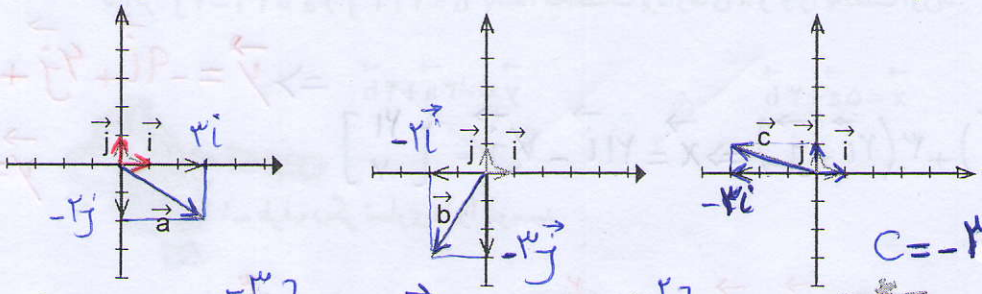
خلاصه درس

Donyaha.iR

Donyaha.iR

## کار در کلاس

در هر قسمت، بردار داده شده را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.




$\vec{a} = 3i - 2j = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\vec{b} = -2\vec{i} - 3j = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $C = -3i + j = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

## فعّالیت

۱ــ طرف دیگر هر تساوی را مانند نمونه کامل کنید.

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ $\quad$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ $\quad$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{i} - \vec{j}$ $\quad$ $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

$\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $2\vec{i} - \vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $2\vec{i} - 3\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $3\vec{i} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ مهم $\quad$ $3i + 0j = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

۲ــ دو دانش‌آموز معادلهٔ برداری زیر را حل کرده‌اند. مراحل راه‌حل آنها را با هم مقایسه کنید.

| راه حل سعید | راه حل حمید |
|---|---|
| $3i + j + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j}$ |
| $2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{i} - \vec{j}$ |
| $2\vec{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $2\vec{x} = -8\vec{i}$ |
| $\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\vec{x} = -4\vec{i}$ |

سعید بردار $3i+j$ را برحسب مختصات نوشته و سپس حل را ادامه داده است

حمید بردار $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ را برحسب بردارهای واحد مختصات نوشته و سپس شروع به انجام عملیات کرده است

۳ــ معادله‌های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \vec{i} - \vec{j}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow -2\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \dfrac{\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}}{-2}$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ +1.5 \end{bmatrix}$

$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

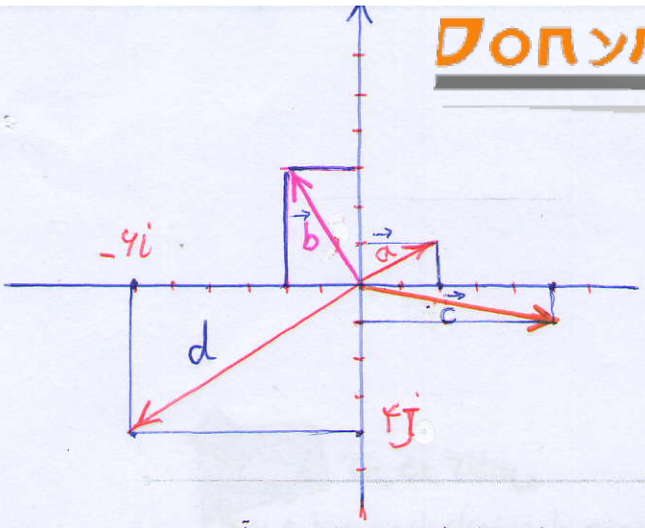
$2i - j + 3x = -6i + 3j$

$\Rightarrow 3\vec{x} = -8i + 4j$

$\Rightarrow \vec{x} = -\frac{8}{3}i + \frac{4}{3}j$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$

Donyaha.iR




## کار در کلاس

اگر $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$ و $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای x و y را به‌دست آورید.

$\vec{x}=5\vec{a}+3\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{y}=-3\vec{a}+4\vec{b}$ $\Rightarrow \vec{y}=-9\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{i}+4\vec{j}$

$\vec{x}=5(3\vec{i}-2\vec{j})+3(2\vec{i}+\vec{j}) \Rightarrow \vec{x}=21\vec{i}-7\vec{j}=\begin{bmatrix}21\\-7\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{y}=\begin{bmatrix}-1\\10\end{bmatrix}$

## تمرین

۱ــ طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید.

$\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}=3\vec{i}+7\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}=-2\vec{i}+5\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{c}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=3\vec{i}-2\vec{j}$

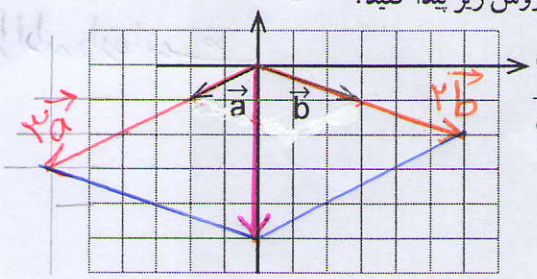
$\vec{d}=\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}=-2\vec{i}-4\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{e}=\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix}=-5\vec{i}$ $\qquad$ $\vec{f}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}=-2\vec{j}$

۲ــ دو محور عمود برهم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. آنگاه بردارهای زیر را روی آن دستگاه مختصات رسم کنید و هر بردار را برحسب بردارهای واحد i و j بنویسید.

بالا

$\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\vec{i}+\vec{j}$ $\quad$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=-2\vec{i}+3\vec{j}$ $\quad$ $\vec{c}=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}=5\vec{i}-\vec{j}$ $\quad$ $\vec{d}=\begin{bmatrix}-6\\-4\end{bmatrix}=-6\vec{i}-4\vec{j}$

۳ــ با توجه به شکل زیر، مختصات بردار c را با دو روش زیر پیدا کنید.




الف) رسم شکل و نوشتن مختصات $\vec{c}$ از روی شکل

$\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}=[\ \ ]$ $\qquad$ روش هندسی

ب) پیدا کردن مختصات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و قرار دادن آنها در تساوی زیر. $\qquad$ روش جبری

$\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}=3\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix}$

ویژگی‌های هر روش را بیان کنید. $\Rightarrow$ در روش هندسی می‌توان با رسم شکل و بدون انجام محاسبات حاصل

کدام روش برای رایانه‌ای شدن مناسب‌تر است؟ چرا؟ روش جبری، چون محاسباتی هست و رایانه کارهای محاسباتی را سریع‌تر انجام می‌دهد



جمع دو بردار را بدست آورد ولی اگر صفحه شطرنجی نباشد و یا طول و عرض بردارها بزرگ یا عددی غیرصحیح و یا گنگ باشد تقریبا روش اول ناکارآمد است روش جبری بسیار سریع‌تر و کارآمدی باشد

جواب سوال ششم

مختصات ربات پس حرکت $n$ ام

اگر $n$ زوج باشد $\Rightarrow$ مختصات $= \begin{bmatrix} 1+2+3+\cdots+\frac{n}{2} \\ 1+2+3+\cdots+\frac{n}{2} \end{bmatrix}$

اگر $n$ فرد باشد $\Rightarrow$ مختصات $= \begin{bmatrix} 1+2+3+\cdots+\frac{n+1}{2} \\ 1+2+3+\cdots+\frac{n-1}{2} \end{bmatrix}$

۴ــ با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تقریبی آن را مانند نمونه رسم کنید.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| طول | + | − | + | − |
| عرض | + | + | − | − |
| شکل تقریبی | ↗ | ↖ | ↘ | ↙ |

حل

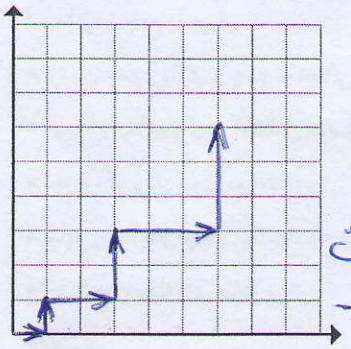
۵ــ اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، بردار x را از معادلهٔ زیر پیدا کنید.

$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b} \Rightarrow 2\vec{x} - \vec{j} = 4\vec{i} - 6\vec{j} - (-\vec{i} + 2\vec{j}) \Rightarrow 2\vec{x} = 5\vec{i} - 7\vec{j} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$

حل

۶ــ یک روباتِ برنامه‌ریزی شده به‌صورت زیر از مبدأ مختصات حرکت می‌کند.

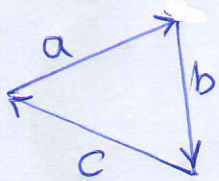
با مشاهدهٔ شش حرکت این روبات، الگوی حرکت آن را کشف کنید و توضیح دهید. روبات پس از حرکت دهم، به کدام نقطه می‌رسد؟



بالا

| شش حرکت | ۲ | ۴ | ۶ | ۸ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|
| مختصات | $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ | | $\begin{bmatrix} 1+2+3+4+5 \\ 1+2+3+4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$ |
| | ۱ | ۱+۲ | ۱+۲+۳ | | |

۷ــ حمیده با خود فکر می‌کرد که اگر چند بردار با هم جمع شوند، بردار حاصل جمع از همهٔ آنها بزرگ‌تر است. آیا او درست فکر کرده است؟ با کشیدن شکل توضیح دهید.

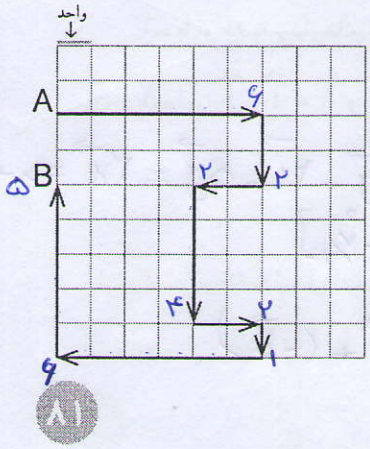



خیر

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

ممکن است حاصل جند بردار برابر بردار صفر شود

۸ــ در صفحهٔ شطرنجی زیر، یک خودرو با نقطهٔ A مشخص شده است. این خودرو مسیری را طی کرده است تا به نقطهٔ B برسد؛ در کل به اندازهٔ چند واحد حرکت کرده است؟




$6+2+2+4+2+1+6+5 = 28$

خودرو از نقطهٔ A به B در راستای عمودی چند واحد جابه‌جا شده است؟ دو واحد



Donyaha.iR

## مرور فصل ۵

### مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود آنها را توصیف کنید و برای هریک مثالی بزنید.

- جمع (برآیند) بردارها
- تجزیهٔ بردار
- ضرب عدد در بردار
- بردارهای واحد مختصات

در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه‌ای از درس را بنویسید.

- پیداکردن جمع دو بردار.
- پیدا کردن برآیند دو بردار که ابتدای آنها یک نقطه باشد.
- نوشتن جمع برداری و جمع مختصاتی
- ضرب یک عدد در بردار
- رسم بردارهای ترکیبی که شامل حاصل‌جمع مضرب‌های دو بردارند.
- پیداکردن مختصات بردارهای ترکیبی
- تجزیهٔ یک بردار روی دو امتداد.
- نوشتن مختصات بردار با بردارهای واحد مختصات.
- نمایش بردارهای واحد مختصات به صورت مختصاتی.
- حل کردن معادله‌های شامل بردار.

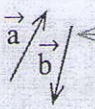
### کاربرد

موضوعات این فصل در درس‌های علوم (فیزیک ــ مکانیک) شما کاربرد زیادی دارد. ضمن آنکه در شاخه‌ای از ریاضیات به نام «جبر خطی و فضای برداری» نیز مطرح می‌شود و به کمک آن می‌توانید مسائل مختلف ریاضی و فیزیک را حل کنید.

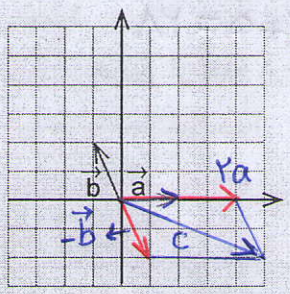
### تمرین‌های ترکیبی

اگر بتوانید تمرین‌های زیر را انجام دهید، می‌توانید مطمئن باشید که این فصل را به‌خوبی آموخته‌اید.

۱ــ با توجه به بردارهای a و b و c، بردار d را رسم کنید. $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$




۲ــ اگر $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار x را پیدا کنید.

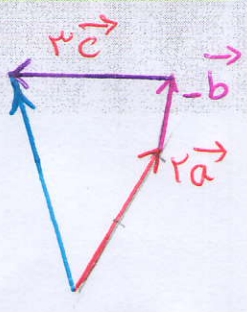



$2\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{x} \Rightarrow 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{i} - 5\vec{j} = 3\vec{x} \Rightarrow -7\vec{j} = 3\vec{x}$

$\vec{x} = -\frac{7}{3}\vec{j} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7/3 \end{bmatrix}$

۳ــ با توجه به شکل، مختصات بردار c را پیدا کنید.

$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{a} + (-\vec{b})$




حل سؤال یک



Donyaha.iR