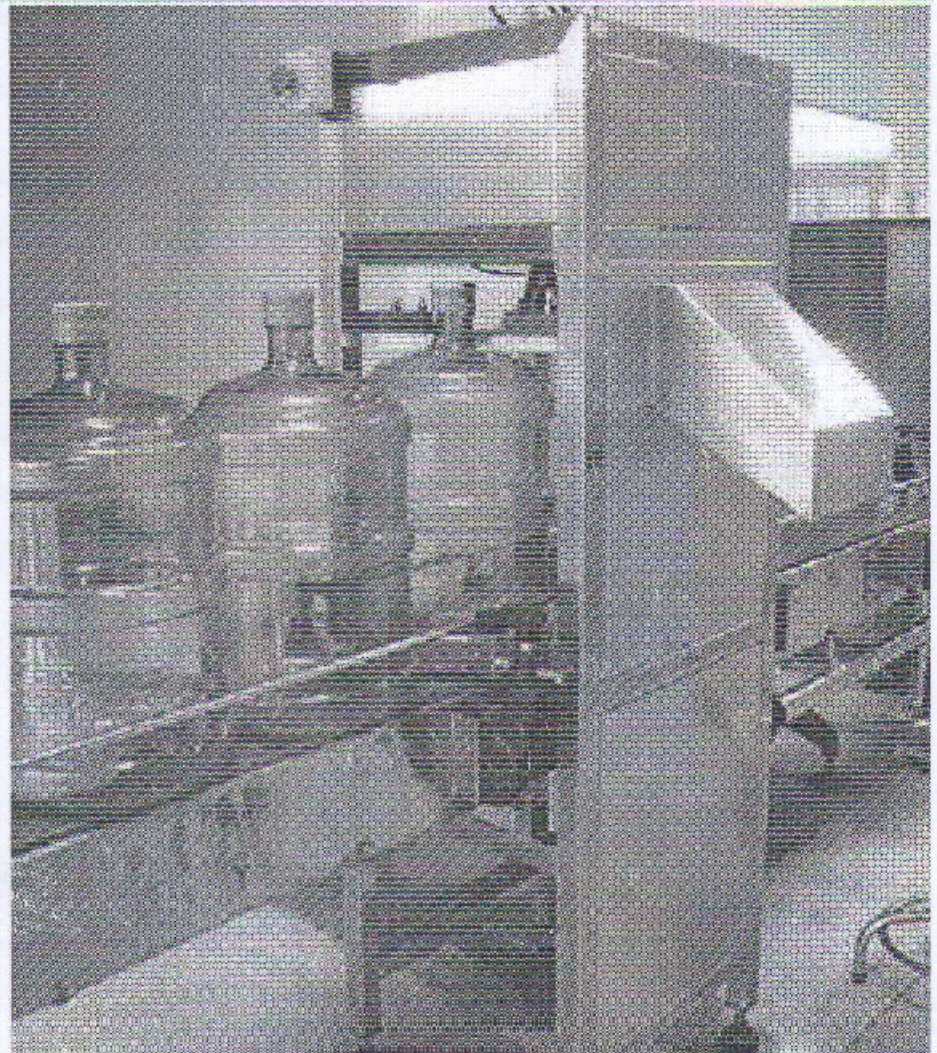
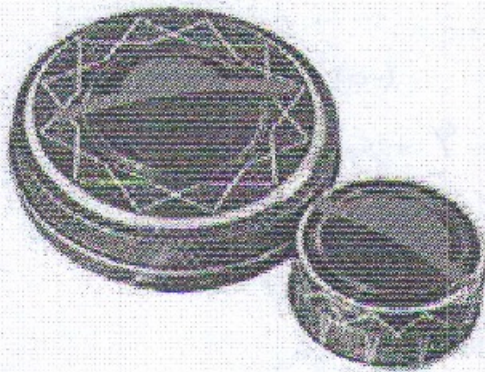
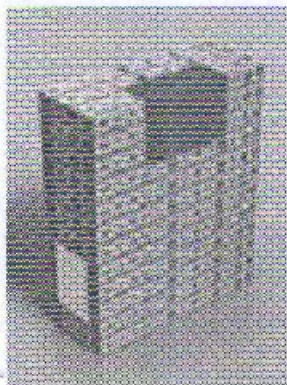




د. دکتر کدراستوانه و منسور است

# فصل ۵

سطح و حجم



- حجم های هندسی
- محاسبه حجم های منشوری
- مساحت جانبی و کل
- حجم و سطح

اهمیت بسته بندی محصولات غذایی کمتر از اهمیت تولید آن محصول نیست. برای مثال در بسته بندی شیرینی و شکلات کیفیت و ظاهر بسته بندی در فروش آن تأثیر زیادی دارد. یکی از موضوعات مهم در این بسته بندی ها رابطه بین سطح و حجمی است که با آن سطح می تواند به وجود آورد.





۱- به اطراف خود (کلاس - خانه - خیابان و ...) به دقت نگاه کنید.

آیا چیزی پیدا می کنید که حجم نداشته باشد؟

در تصویر مقابل چه نوع حجم هایی را می بینید؟  
 کره - استوانه - مخروط - ملعب جهنم

آیا همه آنها شکل هندسی دارند؟  
 خیر (نظر طراح کتاب) - اسب

آیا می توانید یک طبقه بندی از انواع حجم ها ارائه کنید؟

۱- کره  
 ۲- منشوری  
 ۳- هرمی  
 ← شکل هندسی نظم دارد

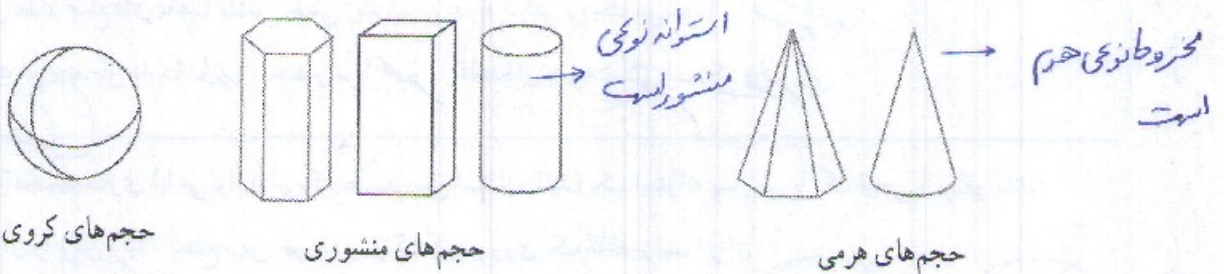
حجم ها را می توان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم کرد. حجم های هندسی شکل های مشخص و تعریف شده دارند. حجم های هندسی را می توان به سه دسته تقسیم کرد: منشوری - کره - هرمی. برخی از حجم های هندسی نیز ترکیبی از این سه نوع هستند.

۱- در تصویر فعالیت بالا حجم های هندسی را با ✓ و غیر هندسی را با × مشخص کنید.

در حجم های هندسی نوع آن را تعیین کنید.

در حجم های ترکیبی نیز مشخص کنید که از چه نوع حجم هایی ساخته شده اند.

۲- با توجه به شکل های زیر خصوصیت های سه نوع حجم هندسی زیر را بنویسید.



حجم های منشوری: دو قاعده ی مساوی دارند - قاعده ها موازی اند - سطح جانبی مستطیل من باشد  
 حجم های هرمی: یک قاعده دارند - وجوه جانبی مثلث من باشند - این مثلث ها در رأس مشترک می باشند  
 حجم های کره: قاعده ندارند - ضلع ندارند - گرد هستند

اصلاح شود

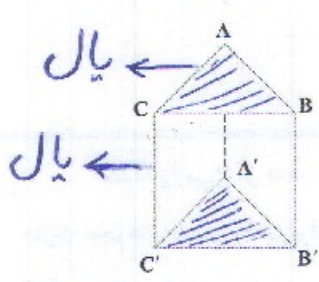


نکته:

# به وجه‌های بالایی و پایینی قاعده و به وجه اطراف و وجه جانبی گوئیم

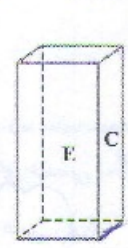
حجم‌های منشوری بین دو صفحه موازی قرار می‌گیرند.  
 به دو سطح بالا و پایین آن قاعده و به سطح‌های اطراف آن وجه جانبی، و به محل برخورد هر دو سطح یال و به نقطه برخورد هر سه سطح رأس می‌گویند.

۱- در هر یک از منشورهای زیر مشخص کنید چند وجه دارد؛ یال‌ها، رأس‌ها و قاعده‌ها را نام ببرید.



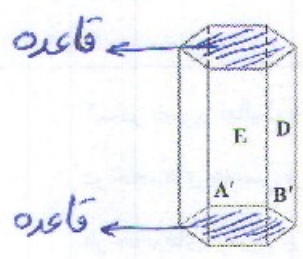
تعداد وجه‌های جانبی:  $3$   
 رأس‌ها:  $6$   
 یال‌ها:  $9$   
 قاعده‌ها:  $2$

منشور سه پهلو



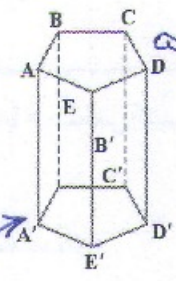
تعداد وجه‌های جانبی:  $4$   
 رأس‌ها:  $8$   
 یال‌ها:  $12$   
 قاعده‌ها:  $2$

منشور چهارپهلو



تعداد وجه‌های جانبی:  $6$   
 رأس‌ها:  $12$   
 یال‌ها:  $18$   
 قاعده‌ها:  $2$

منشور پنج پهلو منشور شش پهلو



تعداد وجه‌های جانبی:  $5$   
 رأس‌ها:  $10$   
 یال‌ها:  $15$   
 قاعده‌ها:  $2$

اشکال چایی

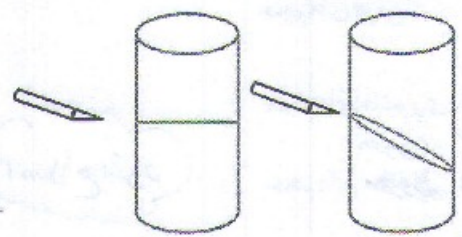
۲- برای اینکه در نام بردن یال و رأس چیزی جا نیفتند، از چه راهبردی استفاده می‌کنید؟ **انوسازی (جدول تقاطع بار)**

۳- اگر تعداد ضلع‌های قاعده منشور خیلی زیاد شود، به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ **استوانه**

۴- استوانه چند یال دارد؟ **نوار** چند رأس؟ **صفر** قاعده آن به چه شکلی است؟ **دایره**

دست ورزی

با خمیر مجسمه‌سازی (یا می‌توانید از یک سیب‌زمینی استفاده کنید) یک استوانه بسازید. با یک قیچی یا چاقو مانند



شکل‌های زیر آن را برش بزنید. سطح برش خورده را رنگ کنید و روی یک کاغذ بزنید، اثر آن

به چه شکلی است؟ **بیضی**

همین فعالیت را می‌توانید با برش‌های دیگر تکرار کنید. همچنین به جای استوانه می‌توانید

منشورهای دیگری را هم امتحان کنید. به این کار مقطع زدن می‌گویند.

نرم‌افزارهای زیادی هستند که می‌توانند این فعالیت را شبیه‌سازی کنند. در صورت

تمایل آنها را به کار ببرید.





۱- آیا ممکن است مقطع یک کره و یک استوانه هم شکل باشند؟ در چه صورت؟ بله

آیا ممکن است مقطع یک منشور و یک هرم هم شکل باشند؟ بله

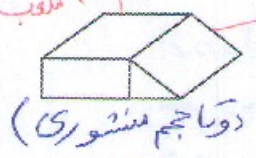
۲- یک استوانه از دید بالا به چه شکلی دیده می شود؟ دایره

یک منشور ۶ پهلو به چه شکلی دیده می شود؟ شش ضلعی

رأس های منشوری یا قاعده ۶ ضلعی منتظم روی دایره قاعده استوانه است. این حجم از بالا به چه شکلی دیده می شود؟

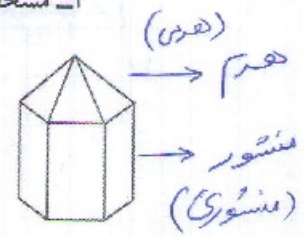
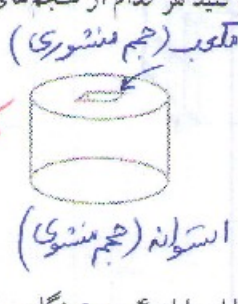
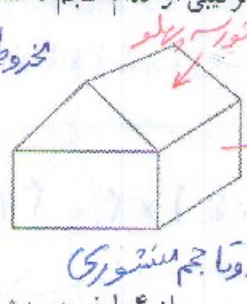
است  
دایره ای هم بدینش ضلعی (درون آن محاط شده)

منشور ۶ پهلو  
مکعب

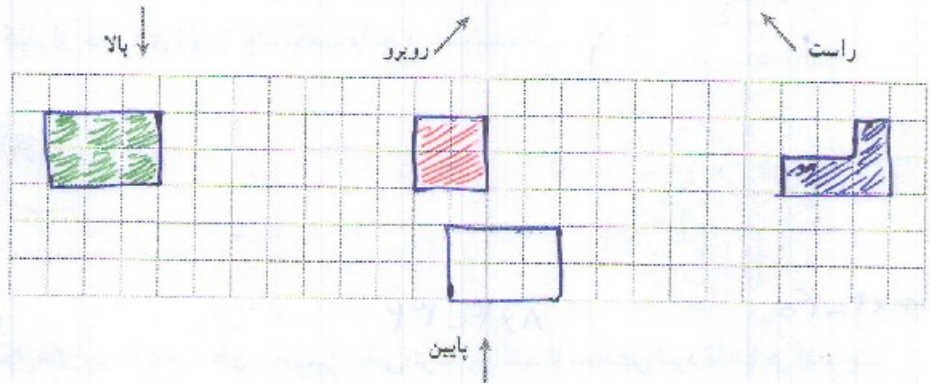
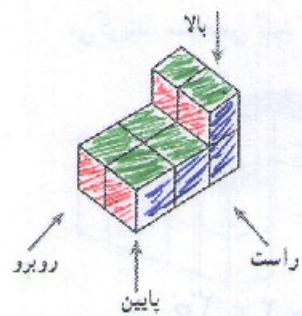


۳- مشخص کنید هر کدام از حجم های زیر، ترکیبی از کدام حجم ها هستند؟

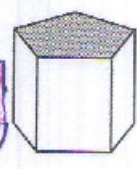
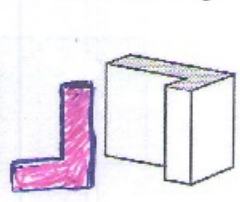
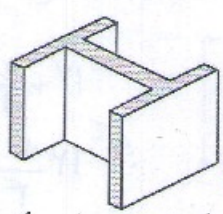
دو تا حجم منشوری  
مکعب (حجم منشوری)



۴- حجم مقابل را از ۴ جهت نگاه می کنیم این حجم از ۴ طرف به چه شکلی دیده می شود؟



۵- قاعده منشورهای زیر را رسم کنید (در واقع دید از بالا یا همان مقطع منشور است).



۶- بلورها کریستال های معدنی به طور طبیعی شکل می گیرند، ولی دارای حجم هندسی اند. برای نمونه مشخص کنید

۳ بلور زیر از چه حجم هایی درست شده اند؟



دو تا هرم و یک منشور

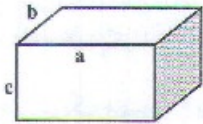
هرم منشور

هرم



۱- در دوره دبستان آموختید که حجم یک مکعب مستطیل برابر است با حاصل ضرب طول، عرض و ارتفاع. با توجه به

درس جبر که در فصل قبل یاد گرفتید، حجم مکعب مستطیل را با یک رابطه جبری نشان دهید.



$$V = abc$$

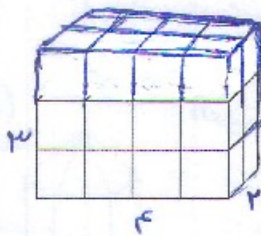
۲- قاعده مکعب مستطیل از ۸ مربع به ضلع یک سانتی متر درست شده است.  $(2 \times 2)$

اگر روی این قاعده، مکعب مستطیلی به ارتفاع ۳ سانتی متر درست کنیم.

$$\text{حجم آن چقدر می شود؟} \quad (2 \times 2) \times 3 = 12 \text{ cm}^3$$

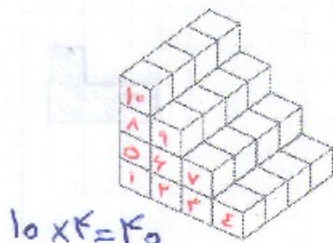
اگر قاعده مکعب مستطیل  $3 \times 4$  باشد، با همان ارتفاع چه حجمی درست می شود؟

$$(3 \times 4) \times 3 = 36 \text{ cm}^3$$

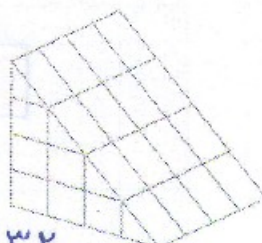


۳- همچنین آموختید که واحد حجم مکعبی به ضلع ۱ سانتی متر یا ۱ متر، یک سانتی متر مکعب یا یک مترمکعب

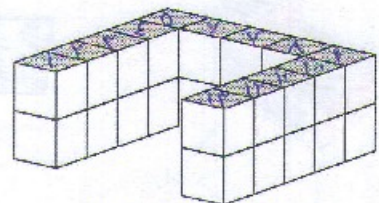
می گویند. مشخص کنید که هر کدام از حجم های زیر از چند مکعب واحد درست شده اند.



$$10 \times 4 = 40$$



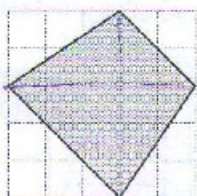
$$8 \times 4 = 32$$



$$13 \times 2 = 26$$

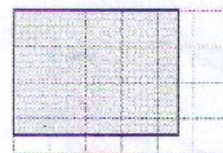
۴- اکنون هر کدام از شکل های زیر را به مربع های به ضلع ۱ سانتی متر تقسیم کنید تا مشخص شود قاعده هر کدام چند

مربع به ضلع یک سانتی متر است. (می توانید از عدد های کسری هم استفاده کنید.)



$$\frac{5 \times 5}{2} = 12,5$$

$$12,5 \times 3 = 37,5 \text{ واحد مکعب}$$



$$12 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$12 \frac{2}{4} \text{ قاعده}$$

$$\frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4}$$

واحد مکعب

اگر روی این قاعده ها منشوری به ارتفاع ۳ سانتی متر درست کنیم، حجم هر کدام چقدر می شود؟

اگر به همین ترتیب بتوانیم مساحت قاعده هر منشور را با مربع های واحد سطح تقریب بزینم، چگونه

می توانیم حجم شکل های منشوری را به دست آوریم؟ ارتفاع  $\times$  مساحت قاعده  $= V$

برای مثال قاعده یک استوانه که به شکل دایره است را با مربع های واحد تقریب بزیند و حجم استوانه

به ارتفاع ۳ سانتی متر را به طور تقریبی به دست آورید.

$$V \approx 37 \times 3 = 111 \text{ واحد مکعب}$$

$$V = (3,5 \times 3,5 \times 3,14) \times 3 = 115,4$$

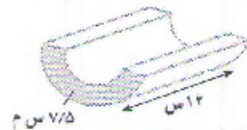
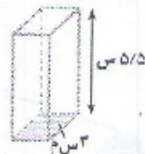
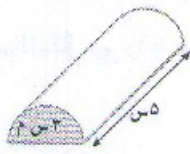
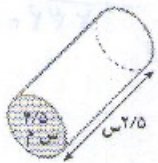
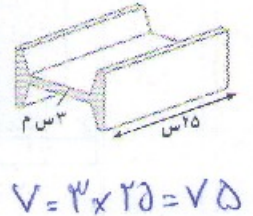
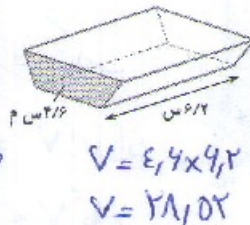
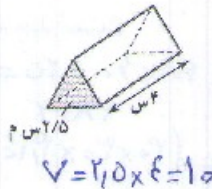
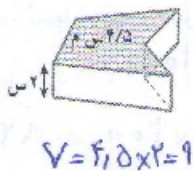
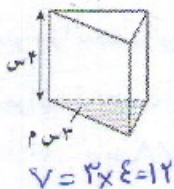
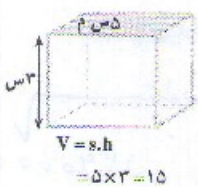


۱- با توجه به فعالیت صفحه قبل، رابطه جبری به دست آوردن حجم های منشوری (V) را که در آن مساحت قاعده منشور

$$V = S \cdot h$$

(S) و ارتفاع منشور (h) موجود است، بنویسید.

۲- با توجه به رابطه بالا و مساحت قاعده داده شده، حجم هر شکل را محاسبه کنید.



$V = 4,5 \times 2,5$   
 $V = 11,25$

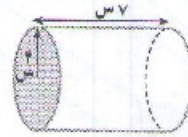
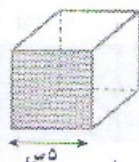
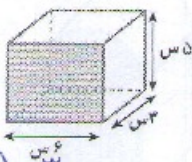
$V = 3 \times 5 = 15$

$V = 4,5 \times 1,5$   
 $V = 9,75$

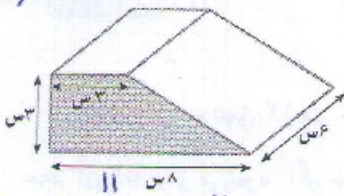
$V = 2 \times 5,5$   
 $V = 11,5$

$V = 7,5 \times 12 = 90$

۳- ابتدا مساحت قاعده و سپس حجم هر یک از اجسام زیر را حساب کنید. برای به دست آوردن مساحت و حجم هر



$V = (3 \times 2 - 1 \times 1) \times 10$   
 $V = 5 \times 10 = 50$



$V = (3 \times 2 - 1 \times 1) \times 10$   
 $V = 5 \times 10 = 50$

۴- منبع آبی به شکل استوانه است که شعاع قاعده آن ۰/۸ متر و ارتفاعش

۲ متر است. این منبع چند متر مکعب آب می گیرد؟

$V = (0,8 \times 0,8 \times 3,14) \times 2 = 4,0192$  متر مکعب

$4,0192 \times 1000 = 4019,2$  لیتر



۵- یک جعبه دستمال کاغذی به شکل مکعب مستطیل داریم که طول آن ۲۵، عرض آن ۱۲ و ارتفاعش ۵ سانتی متر

است. تعیین کنید چند عدد از این جعبه ها در یک کارتن مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰ و ۳۰ و ۲۴ سانتی متر جا می گیرد؟

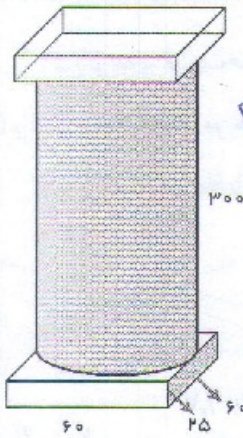
~~$50 \times 30 \times 24 = 36000$~~   
 ~~$30 \times 50 \times 12 = 18000$~~   
 $36000 \div 18000 = 2$

$V = 50 \times 30 \times 24 = 36000$  ۶۴

$V = 25 \times 50 \times 12 = 15000$

$36000 \div 15000 = 24$  تعداد





۱- حجم ستون شکل مقابل را به صورت تقریبی پیدا کنید.

$$V = (40 \times 40) \times 350 = 1,240,000$$

(کل شکل را مکعب مستطیل در نظر بگیرید)

حالا کمی دقیق تر محاسبه کنید و آن را به سه قسمت تقسیم کرده و حجم سه تکه را جدا گانه

حساب کنید و مجموع را به دست آورید. (شعاع قاعده استوانه چند است؟)

$$V_{\text{مکعب}} = 40 \times 40 \times 25 = 90,000$$

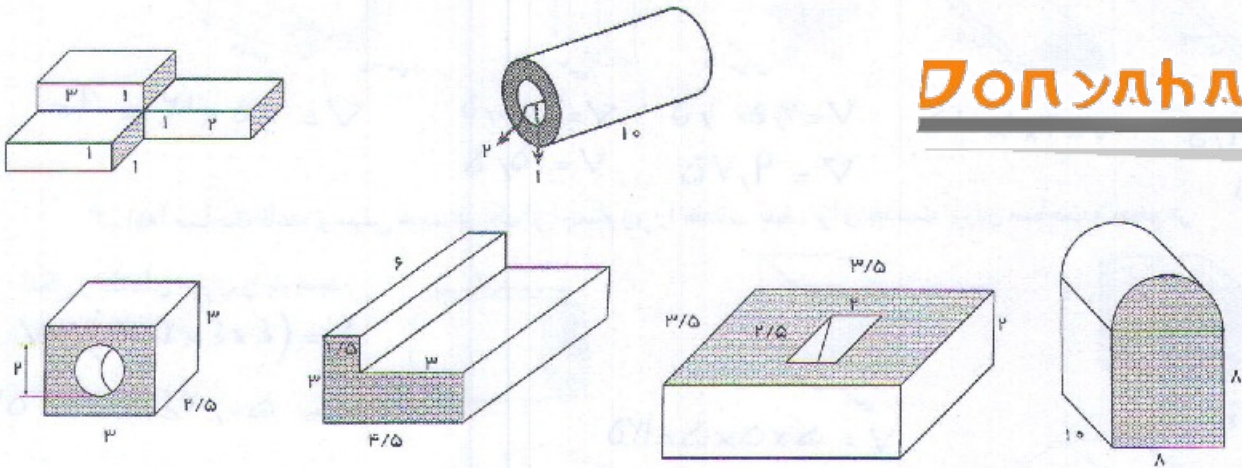
تفاوت دو جواب را به دست آورید.

$$V_{\text{استوانه}} = (30 \times 30 \times \frac{1}{4}) \times 350 = 1,471,800$$

$$V_{\text{کل}} = 2 \times 90,000 + 1,471,800 = 1,027,800$$

$$\begin{array}{r} 1,240,000 \\ - 1,027,800 \\ \hline 212,200 \end{array}$$

۲- حجم اشکال زیر را به دست آورید.



**Доплата.iR**

۲- چاهی به عمق ۱۲ متر حفر کرده ایم. شعاع دهانه این چاه ۰/۴ متر است. وقتی خاک کنده و بیرون ریخته می شود،

حجم آن ۱/۳ برابر می شود. اگر خاک این چاه بعد از بیرون آمدن در سطحی به ابعاد ۴ و ۵ متر به طور یکنواخت ریخته شود تا

$$h = \frac{1/3 \times 4 \times 4 \times 3/14 \times 12 \times 1/3}{4 \times 5} \approx 0/4 \text{ متر}$$

یک مکعب مستطیل به وجود آید، ارتفاع این مکعب مستطیل چقدر خواهد شد؟

۴- حوضی است به شکل مکعب مستطیل و ابعاد آن ۳ و ۴ و ۱/۵ متر است. این حوض خالی را با شیر آبی که در هر دقیقه

$$\frac{4 \times 3 \times 1/5 \times 1000}{90 \times 90} = 5$$

۶۰ لیتر آب وارد آن می کند، پر می کنیم. چند ساعت طول می کشد تا حوض پر شود؟

۵- یک پارچ به شکل استوانه است که ارتفاع آن ۳۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۴ سانتی متر است. آب داخل این پارچ

را در لیوان هایی به شکل استوانه که ارتفاع آنها ۱۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۲ سانتی متر است، می ریزیم. این آب چند لیوان

$$\frac{V_{\text{پارچ}}}{V_{\text{لیوان}}} = \frac{4 \times 4 \times \pi \times 30}{2 \times 2 \times \pi \times 10} = 12$$

را پر می کند؟ **نوع: حجم ها را محاسبه کنید**

۶- قاعده یک منشور سه پهلو مثلث قائم الزاویه ای که اندازه ضلع های قائمه آن ۳ و ۴ است. ارتفاع این منشور ۶

$$V = \left( \frac{3 \times 4}{2} \right) \times 6 = 36$$

سانتی متر است. حجم این منشور را پیدا کنید.

هم آب (لیتر) زمان (ساعت)

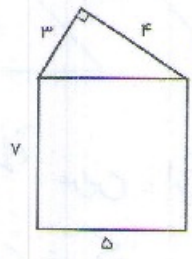
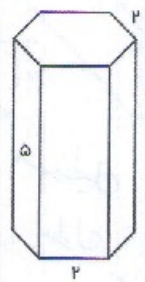
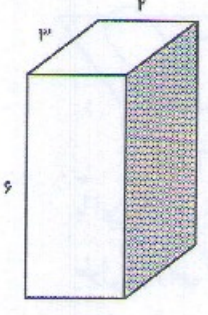


۱	۴۰ × ۴۰
۲	۴ × ۳ × ۱/۵ × ۱۰۰۰



# مساحت جاسی و کل

۱- مساحت همه وجه‌های جانبی منشورهای زیر را به دست آورید. هر وجه چه شکلی دارد؟



به مجموع این مساحت‌ها مساحت جانبی شکل می‌گویند.

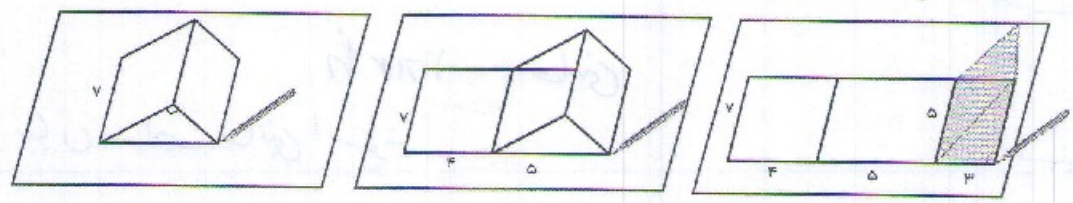
$$S' = 2 \times \frac{3 \times 4}{2} + 5 \times h + 3 \times h + 4 \times h$$

$$S = 12 + 3h + 4h + 5h = 12 + 12h$$

فعالیت دست ورزی

۲- برای به دست آوردن مجموع مساحت جانبی منشور سه پهلوئی بالا به صورت زیر، آن را روی کاغذ قرار می‌دهیم، و

به اندازه طول هر ضلع یک علامت می‌گذاریم.



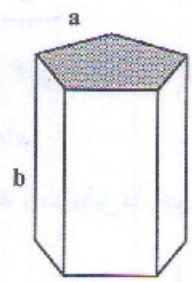
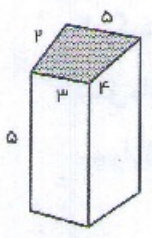
با توجه به شکل‌های بالا چگونه می‌توانستیم ساده‌تر مساحت جانبی را به دست آوریم؟

۳- با توجه به سوال بالا اگر مساحت را با S، محیط را با p و ارتفاع را با h نشان دهیم. رابطه جبری مساحت جانبی منشورهای بالا را بنویسید.

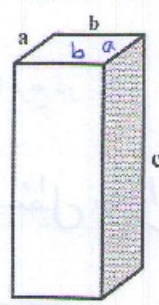
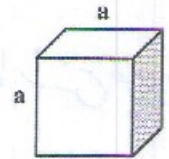
$S = p \cdot h$  (جانبی)

$S_{\text{جانبی}} = a \cdot b$

۱- مساحت جانبی شکل‌های زیر را پیدا کنید.



$S' = 4 \times a \cdot a$



$$S' = c(2a + 2b)$$

$$S = 2c(a + b)$$

$$S = 2ac + 2bc$$

۲- ستونی به شکل منشور ۶ پهلوست که هر ضلع آن ۰/۲ متر و ارتفاع آن ۵ متر است. می‌خواهند بدنه این ستون را

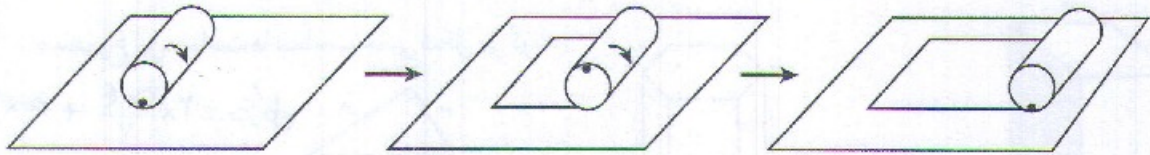
مترمربع  $1 = 0.2 \times 5 = 1$  کاشی کاری کنند.

چند متر مربع کاشی لازم است؟

مترمربع  $S = 1 \times 4 = 4$

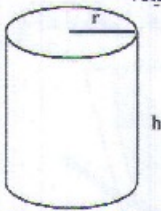


۱- یک استوانه را به شکل زیر روی یک صفحه می‌غلطانیم و ابتدا و انتهای کار را مشخص می‌کنیم.



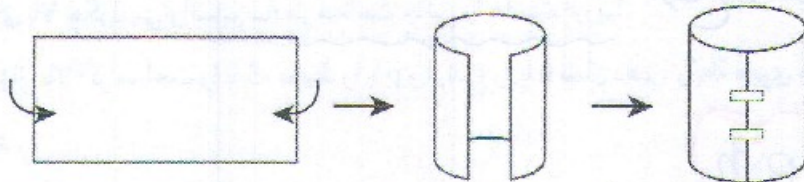
با این کار چه شکلی به دست می‌آید؟ **مستطیل**  
 طول و عرض آن چگونه به دست می‌آید؟ **طول = محیط قاعده استوانه**  
**عرض = ارتفاع استوانه**  
 مساحت این شکل چگونه به دست می‌آید؟ **مساحت = طول × عرض =  $2\pi r \cdot h$**

۲- با توجه به سؤال بالا مساحت جانبی یک استوانه به ارتفاع  $h$  و شعاع قاعده  $r$  را با عبارت جبری نشان دهید.

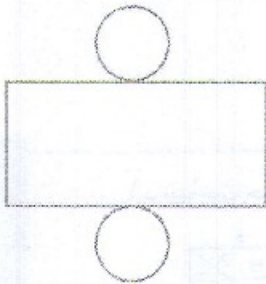


**هدف: بیان مساحت جانبی استوانه**  
 $S = 2\pi r \cdot h$  جانبی

۱- با توجه به سؤال بالا با یک مستطیل می‌توان یک سطح استوانه‌ای درست کرد.



این سطح استوانه را روی کاغذ بگذارید و دور آن خط بکشید. این دایره قاعده استوانه است. چون استوانه ۲ قاعده دارد. ۲ دایره و یک مستطیل مساحت کل استوانه را تشکیل می‌دهند.



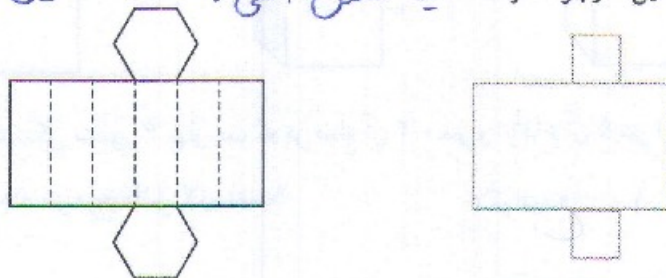
شکل مقابل را گسترده استوانه می‌گویند.

چه رابطه‌ای بین دایره و مستطیل در این گسترده وجود دارد؟ **طول مستطیل با محیط دایره برابر است**

**دایره برابر است**

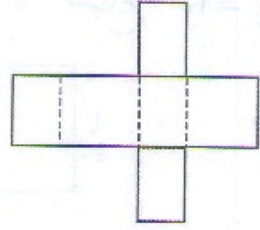
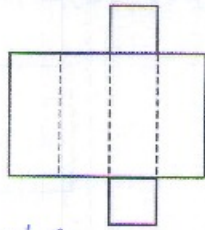
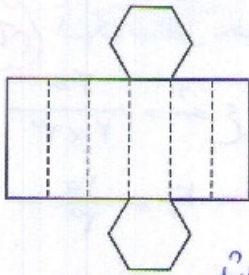
۲- گسترده یک منشور ۶ پهلو با قاعده ۶ ضلعی منتظم و گسترده یک مکعب مستطیل با قاعده مربع در شکل‌های زیر رسم شده‌اند.

چه رابطه‌ای بین قاعده‌ها و مستطیل‌ها وجود دارد؟ **محیط استون ضلعی با طول مستطیل برابر است**





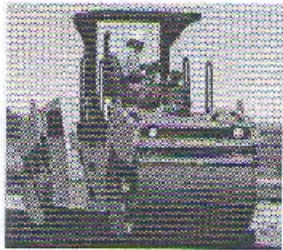
۱- گسترده چند منشور داده شده است. آنها را روی کاغذ بکشید و منشورها را درست کنید و به کلاس بیاورید.



در چه صورت گسترده شکل وسط به یک مکعب تبدیل می شود؟ ارتفاع با طول قایده برابر باشد

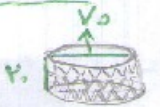
۲- یک غلتک بر روی زمین آسفالت شده باید ۴ بار غلت بزند تا سطح آن صاف شود. اگر

شعاع غلتک ۵۰ سانتی متر و ارتفاع استوانه آن ۱ متر باشد، برای آسفالت کردن سطح یک کوچه به



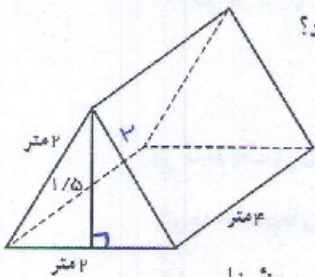
$$\text{تعداد دورها} = \frac{\text{مساحت کوچه}}{\text{مساحت جانبی غلتک}} = \frac{۴ \times (۲۰ \times ۴)}{(۲ \times ۰.۵ \times ۳.۱۴) \times ۲} = \frac{۳۲۰}{۳.۱۴} \approx ۱۰۲$$

$$S_{\text{جانبی}} = ۲ \times ۱۰ = (۷۰ \times ۳.۱۴) \times ۲۰ \times ۱۰ = ۴۳۹۶۰$$



۳- یک چرخ ماشین که کاملاً خیس شده است، با ۱۰ دور چرخیدن روی زمین جای خود را مشخص می کند تا خشک

شود. اگر چرخ به ضخامت ۲۰ سانتی متر و قطر ۷۰ سانتی متر باشد، چه مساحتی از زمین را خیس خواهد کرد؟



۴- یک جادر مسافرتی به شکل مقابل است. چند متر پارچه برای ساخت آن به کار رفته است؟

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{قاعده}} + ۲ \times S_{\text{جانبی}}$$

$$S = (۴ \times ۴) + ۲ \times \frac{۱.۵ \times ۲}{۲} = ۲۷$$

۵- یک مخزن نفت به شکل استوانه ای است که شعاع قاعده آن ۳ متر و ارتفاعش ۵ متر است. می خواهیم بدنه خارجی و

سقف آن را رنگ بزنیم. اگر هزینه رنگ کردن هر متر مربع ۳۰۰۰۰ تومان باشد، برای رنگ کردن این مخزن چقدر باید هزینه کرد؟

۶- می خواهیم با مقوا مکعبی به ضلع ۱۰ cm بسازیم. چند سانتی متر مربع مقوا به کار می رود؟

۷- یک جعبه به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۳۰ و ۵۰ و ۴۰ سانتی متر را با کاغذ کادو پوشانده ایم. برای پوشاندن این

جعبه حداقل چند سانتی متر کاغذ کادو لازم داریم؟ چرا در این مسئله حداقل خواسته شده است؟

۸- با مکعب های به ضلع ۱ واحد حجم مقابل را ساخته ایم. اگر تمام سطح های این حجم را رنگ کنیم، چند مکعب

$$۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$$

تعداد کل

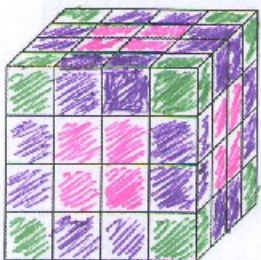
$$۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$$

رنگ ندارد

$$۱۲ \times ۲ = ۲۴$$

چند مکعب ۲ وجهشان رنگ می شود؟ ۲۴

چند مکعب ۳ وجهشان رنگ شده است؟ ۸



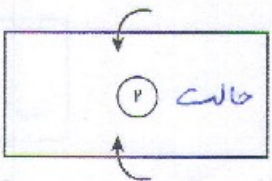
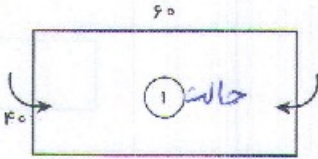


## حجم و سطح

تاریخ

شعاع قاعده =  $\frac{40}{2 \times \pi} = \frac{40}{2 \times 3.14} = 6.36$

$r_1 = 10$



شعاع =  $\frac{40}{2 \times 3} = 6.66$   
 $r_2 = \frac{20}{3}$

در هر حالت حجم استوانه را به دست آورید. مانند نمونه از رابطه‌های جبری کمک بگیرید. برای ساده‌تر شدن محاسبه‌ها عدد بی (π) را ۳ در نظر بگیرید. در هر حالت ابتدا شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را تشخیص دهید.

$V_1 = h \times S = h_1 \times r_1 \times r_1 \times \pi = 40 \times 10 \times 10 \times 3 = 12000$

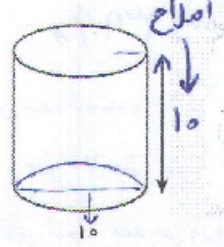
$V_2 = h \times S = 40 \times \frac{20}{3} \times \frac{20}{3} \times 3 = 10000$

نتیجه: وقتی حول ضلع بزرگ‌تر لوله می‌کنیم حجم بیشتری پیدا می‌کند

حجم اولی بیشتر است

با مقایسه حجم‌ها و با توجه به اینکه هر دو حجم با یک مستطیل ساخته شده است، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟  
 ۲- یک کارخانه تولید جای دو نوع بسته‌بندی به شکل‌های زیر ارائه می‌کند. هر دو نوع قوطی با ورق گالوانیزه درست شده‌اند. در کدام یک جای بیشتری جا می‌گیرد؟

$V_1 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$   
 $\frac{V_1}{S_1} = \frac{1000}{400} = 2.5$

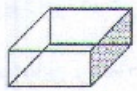
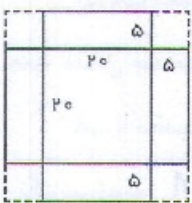


$S_1 = 4 \times 10 \times 10 = 400 \text{ cm}^2$   
 $S_2 = 2(5 \times 5 \times 3) + (10 \times 3) \times 10 = 450 \text{ cm}^2$   
 $V_2 = (5 \times 5 \times 3) \times 10 = 750$   
 $\frac{V_2}{S_2} = \frac{750}{450} = 1.66$

در کدام یک ورق گالوانیزه بیشتری برای ساخت قوطی به کار رفته است؟ در محاسبات خود عدد π را ۳ در نظر بگیرید. ملایب  
 با توجه به عددهای بالا اگر شما مدیر کارخانه باشید، کدام نوع بسته‌بندی را انتخاب می‌کنید؟ چرا؟  
 کدام نوع بسته‌بندی در حمل و نقل بهتر است و جای کمتری می‌گیرد؟ چرا؟  
 جعبه ملایب شکل بهتر است چون

## فضای خالی بین جعبه‌ها موجود نمی‌آید

برای بسته‌بندی شیرینی جعبه‌هایی را درست می‌کنند. شکل گسترده این جعبه‌ها به صورت زیر است و پس از تا کردن مربع‌ها گوشه‌ها روی هم قرار می‌گیرند و جعبه درست می‌شود.



$V = 20 \times 20 \times 5 = 2000 \text{ cm}^3$



با توجه به اندازه‌های داده شده، حجم (گنجایش) جعبه را پیدا کنید؟  
 اگر به جای ۵ سانتی متر لبه‌ها را ۶ سانتی متر در نظر بگیریم با همین مقوا حجم جعبه بیشتر می‌شود یا کمتر؟ کمتر می‌شود

$V = 18 \times 18 \times 4 = 1296 \text{ cm}^3$



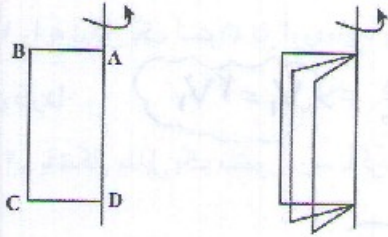
$$h_r = a$$

$$r_r = \frac{b}{2\pi}$$

$$V_r = \left( \frac{b}{2\pi} \times \frac{b}{2\pi} \times \pi \right) \times a$$

$$\frac{V_r}{V_1} = \frac{\left( \frac{b}{2\pi} \times \frac{b}{2\pi} \times \pi \right) \times a}{\left( \frac{a}{2\pi} \times \frac{a}{2\pi} \times \pi \right) \times b} = \frac{b}{a}$$

مستطیل ABCD را حول محوری که از AD می‌گذرد، دوران می‌دهیم. شکل زیر نشان می‌دهد که مستطیل‌ها چگونه



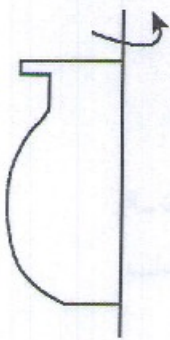
حرکت می‌کنند.

شما هم مانند شکل زیر کاغذی را روی مدادی بچسبانید و آن را بچرخانید و حرکت مستطیل را تماشا کنید.



با چرخاندن این مستطیل چه حجمی به وجود می‌آید؟ استوانه  
 مشخصات آن حجم را بنویسید.  
 ارتفاع استوانه است AD  
 شعاع قاعده‌ی آن است CD

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با حرکت یک سطح در فضا حجم ساخته می‌شود. همین کار را برای شکل‌های دیگر نیز می‌توان انجام داد تا حجم‌های دیگری ساخته شوند. در سال‌های بعد در این مورد بیشتر توضیح داده خواهد شد.

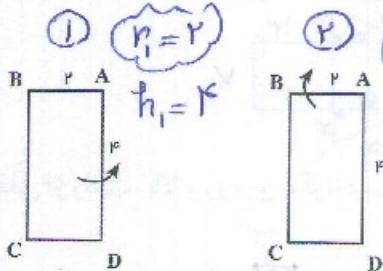


۱- سطحی مثل شکل مقابل را حول محور d دوران می‌دهیم.

حجم چه شکلی ساخته می‌شود؟ می‌توانید با یک فرغره و چرخاندن آن حجم ایجاد شده را ببینید. بدین‌طوری از این خاصیت در خزاطی، تراشکاری و سفالگری برای ساختن حجم‌های مختلف استفاده می‌کنند.

## Допушти. iR

۲- یک مستطیل را یک بار حول محور AD و یک بار حول محور AB دوران دهید. حجم حاصل از این دوران را



حساب کنید.

$$V_r = (\epsilon \times \epsilon \times \pi) \times 2 = 9\pi$$

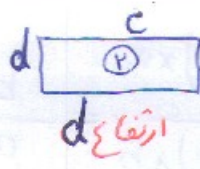
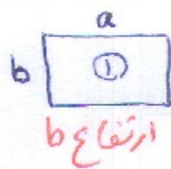
$$V_1 = (2 \times 2 \times \pi) \times \epsilon = 4\pi$$

$$\frac{V_r}{V_1} = \frac{(4 \times 4 \times \pi) \times 2}{(2 \times 2 \times \pi) \times \epsilon} = 2 \Rightarrow V_r = 2V_1$$

راه دوم، راه اول است

بسیار کم حجم سبتری دارد  
 راه حل دوم بالای صفحه





$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\left(\frac{c}{2\pi} \times \frac{c}{2\pi} \times \pi\right) \times d}{\left(\frac{a}{2\pi} \times \frac{a}{2\pi} \times \pi\right) \times b} = \frac{c^2 d}{a^2 b}$$

روشن نمود

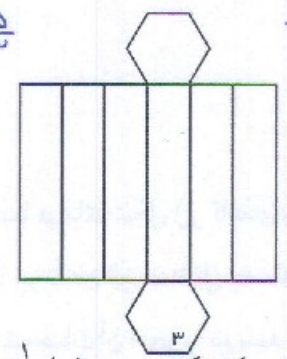
۱- یک مقوا به طول و عرض،  $5 \times 20$  را به شکل استوانه به ارتفاع ۵ در آورده ایم. یک مقوای دیگر را نیز به ابعاد  $10 \times 10$  را به شکل یک استوانه در آورده ایم. با توجه به اینکه مساحت مقواها در دو حالت برابر است، کدام استوانه حجم بیشتری دارد؟

قطر =  $\frac{20}{3}$

سعاع =  $\frac{10}{3} = r_1$

$r_2 = \frac{10}{2 \times 3} = \frac{5}{3}$

۲- با شکل مقابل یک منشور درست کرده ایم. مساحت جانبی آن را پیدا کنید.

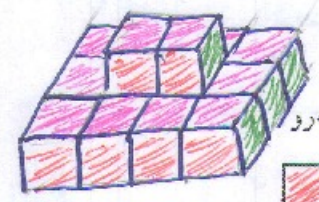


$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\left(\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \pi\right) \times 10}{\left(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3} \times \pi\right) \times 5} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_1 = 2V_2$$

$x$	$210 \times 4 \times 10$	$\Rightarrow x = \frac{210 \times 4 \times 10 \times 100}{32}$
$100$	$32 V_1$	$x = \frac{370}{1} \approx 49.9\%$

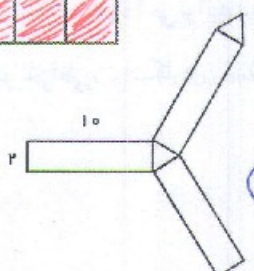
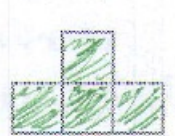
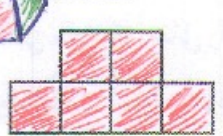
۳- یک صابون مکعب مستطیل شکل به حجم ۳۲ سانتی متر مکعب پس از چند بار مصرف، کوچک شده و به ابعاد  $2 \frac{1}{2}$  و  $4$  و  $1 \frac{1}{4}$  سانتی متر تبدیل شده است. چند درصد این صابون استفاده شده است؟  $100\% - 49.9\% = 50.1\%$

۴- یک استوانه که با یک مقوا به طول ۲۰ سانتی متر و عرض ۱۰ سانتی متر ساخته شده به طور تقریبی چه حجمی دارد؟ (ارتفاع استوانه ۲۰ است.)



۵- اگر یک حجم از بالا و سمت راست و روبرو به صورت زیر دیده شود، آن حجم را رسم کنید.

$$V = (4 \times 3) + 2 = 14$$

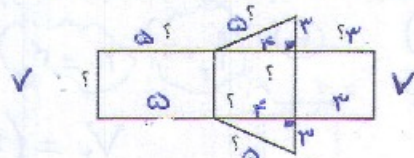
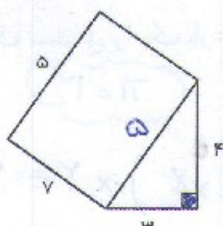


۶- شکل مقابل گسترده یک منشور را نشان می دهد.

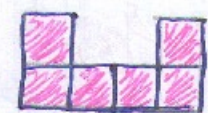
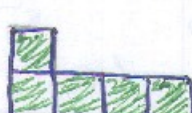
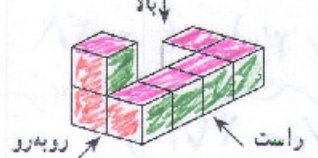
مساحت جانبی منشور را پیدا کنید.

$$S_{\text{جانبی}} = (2 \times 3) \times 10 = 40 \text{ cm}^2$$

۷- با توجه به حجم منشور و ابعاد آن، اندازه ضلع های گسترده آن را بنویسید.



۸- حجم مقابل از راست، بالا و روبرو چگونه دیده می شود؟





# ۵ مرور فصل

## مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید. برای هر کدام مثال بزنید.

- حجم هندسی
- حجم منشوری
- مساحت جانبی
- مساحت کل
- گسترده

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه تهیه کنید.

- انواع حجم‌های هندسی
- حجم مخروطی و حجم منشوری
- قاعده، وجه، یال و رأس حجم‌های منشوری
- مقطع زدن یک حجم منشوری
- رابطه پیدا کردن حجم‌های منشوری
- رابطه پیدا کردن مساحت جانبی حجم‌های هندسی
- رابطه پیدا کردن مساحت کل حجم‌های منشوری
- ساختن یک حجم به کمک گسترده آن
- دوران سطح حول یک محور و ساختن حجم
- مقایسه حجم‌هایی که به یک سطح مشخص درست شده‌اند.

Доплата.iR

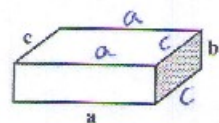
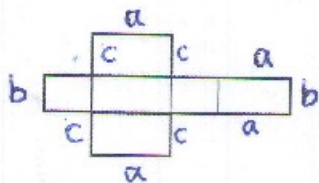
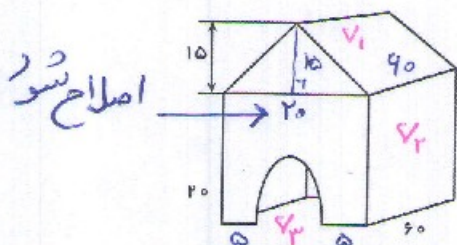
## کاربرد

کاربرد این فصل در زندگی روزمره فراوان است. در دنیایی از اجسام زندگی می‌کنیم و نیاز داریم حجم‌های مختلف را اندازه بگیریم و برای ساختن حجم‌ها نیز از سطح‌ها (کاغذ، مقوا، ورق و ...) استفاده می‌کنیم.

## تمرین‌های ترکیبی

در صورتی که تمرین‌های زیر را توانستید انجام دهید. مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی یاد گرفته‌اید.

- ۱- حجم، مساحت جانبی و مساحت کل شکل‌های زیر را به دست آورید.
- ۲- الف) استوانه به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۲ (ب) منشور چهار پهلو با قاعده مربع به ضلع ۲ و ارتفاع ۲۰
- ۲- الف) با توجه به شکل مکعب مستطیل اندازه و ضلع‌های خواسته شده روی گسترده آن را مشخص کنید.



ب) حجم شکل مقابل را به دست آورید.  $\pi = 3$

۷۲

$$V = \frac{15 \times 20}{2} \times 15 + 20 \times 20 \times 15 - \frac{5 \times 5 \times 3 \times 15}{2}$$

$$V = 9000 + 45000 - 1125 = 52875$$