دنیایی از همه چیز
www.Donyaha.ir

فصل ۵ شمارنده‌ها و اعداد اول

دسته‌بندی کردن، بهویژه ساختن دسته‌های مساوی و قابلیت قسمت از مطالب با کاربرد در زندگی روزمره‌ماست. وقتی سربازها در دسته‌های منظم شمرده‌رژه، قرار دارند، تعداد آنها باید بر تعداد ردیف‌ها و ستون‌ها قابل قسمت باشد.

- عدد اول
- شمارندهٔ اول
- بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک
- کوچک‌ترین مضرب مشترک

Donyaha.iR

مهم: این درس در مجموعه‌ی اعداد طبیعی است

اعداد اول

شمارنده‌ی یک عدد

فعالیت

۱ــ دانش‌آموزان یک مدرسه در کلاس‌های ورزشی ثبت نام کرده‌اند. جدول تعداد ثبت نام شده‌ها و تعداد نفرات هر تیم در آن رشته در جدول زیر مشخص شده است. در کدام رشته ورزشی تعداد ثبت نام شده‌ها مناسب است؟ چرا؟ والیبال، چون به راحتی می‌توانیم دو تیم درست کنیم

در کدام رشته تعداد ثبت نام شده‌ها مناسب نیست؟ چرا؟ ثبت نام در تیم‌های زوج بجز والیبال مناسب نیست ولی وضع در تیم فوتسال خیلی خراب است

رشته ورزشی	فوتسال	والیبال	بسکتبال	پینگ پنگ	بدمینتون
تعداد ثبت نام شده‌ها	۲۱ ← ۲۴	۱۲	۱۳ ← ۱۵	۹ ← ۸	۷ ← ۸
تعداد نفرات هر تیم	۱۲	۶	۵	۲	۲

پاسخ باز است

با کمترین جابه‌جایی نفرات، پیشنهادی ارائه کنید تا تعداد نفرات تمام رشته‌ها مناسب شوند.

۲ــ عدد ۶ را مانند نمونه به صورت ضرب دو عدد طبیعی بنویسید و معنی کنید.

می‌توانید جواب‌ها را به صورت کلامی مطرح نمایید

$۶ = ۳ \times ۲$ سه دسته‌ی ۲ تایی

$۶ = ۶ \times ۱$ ۶ دسته‌ی یکی

یعنی دو دستهٔ ۳ تایی $۶ = ۲ \times ۳$

$۶ = ۱ \times ۶$ یک دسته‌ی ۶ تایی

۳ــ عدد ۱۰ را مانند نمونه تقسیم کنید و یک تساوی بنویسید و آن را معنی کنید. (تقسیم‌ها نباید باقی مانده بیاورند).

$۱۰ \div ۲ = ۵$

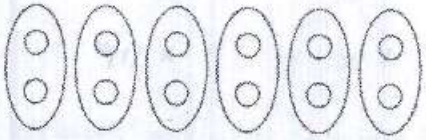
یعنی ۱۰ را می‌توان ۲ تا ۲تا شمرد

$۱۰ \div ۵ = ۲$

$۱۰ \div ۱ = ۱۰$

$۱۰ \div ۱۰ = ۱$

۴ــ ۱۲ دایره را مانند نمونه به دسته‌های مساوی تقسیم کنید. یعنی مشخص کنید ۱۲ را چند تا چند تا می‌شود شمرد. به این ترتیب شمارنده‌های عدد ۱۲ به‌دست می‌آید.



شمارنده‌های ۱۲: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲

فعالیت دسته‌ورزی

اصلاح شود

۱ــ با یکی از روش‌های بالا شمارنده‌های هر عدد را مشخص کنید.

شمارنده‌های ۱۵: ۱، ۳، ۵، ۱۵

شمارنده‌های ۱۴: ۱، ۲، ۷، ۱۴

شمارنده‌های ۸: ۱، ۲، ۴، ۸

شمارنده‌های ۹: ۱، ۳، ۹

کلامی

۲ــ عدد ۲، شمارندهٔ ۴ هست. ۴ هم شمارندهٔ ۱۲ است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که ۲ شمارندهٔ ۱۲ هم هست؟ چرا؟ بله

a شمارنده‌ی b هست و b شمارنده‌ی c است پس a شمارنده‌ی c است

۳ــ به‌طور کلی اگر a شمارندهٔ b باشد، b هم شمارندهٔ c باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که a شمارندهٔ c هم هست؟ چرا؟

کلامی

آری

Donyaha.iR

★ شمارنده‌ی یک عدد، عددی طبیعی است - زیرا یک عدد مثبت که می‌تواند عددی را بشمارد

۱ــ جدول زیر را کامل کنید. شمارنده‌های عدد را از کوچک به بزرگ بنویسید.

با دیدن این جدول چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

عدد	شمارنده‌های عدد			
۹	۱	۳	۹	
۱۵	۱	۳	۵	۱۵
۴	۱	۲	۴	
۱۴	۱	۲	۷	۱۴
۵	۱	۵		
۱۳	۱	۱۳		

عدد یک شمارندهٔ همهٔ اعداد است.

کوچک‌ترین شمارنده هر عدد یک است.

بزرگ‌ترین شمارنده هر عدد خود آن عدد است.

همهٔ شمارنده‌های یک عدد آن عدد می‌شمارد

بعضی از عددها فقط دو شمارنده دارند

هر عدد بزرگ‌تر از ۱ حداقل دو شمارنده دارد.

اصلاح

۲ــ برای عدد ۷ از روش‌های ضرب یا تقسیم کردن یا دسته‌بندی استفاده کرده و شمارنده‌های آن را پیدا کنید.

اعداد اول

به عددهایی مثل ۵، ۱۳ و ۷ که فقط ۲ شمارنده دارند و آن دو شمارنده عدد یک و خود آن عدد می‌باشد، عدد اول می‌گویند.

۱ــ مانند نمونه عددها را به حاصل‌ضرب دو عدد غیر از یک بنویسید.

۱۲ = ۳ × ۴ ، ۹ = ۳ × ۳ ، ۸ = ۲ × ۸ ، ۲۵ = ۵ × ۵ ، ۱۷ ، ۶ = ۲ × ۳ ، ۱۳

کدام عددها را نمی‌توان به‌صورت ضرب دو عدد غیر از یک نوشت؟ ۱۷ و ۱۳

آیا می‌توان گفت هر عددی که به صورت ضرب دو عدد، بزرگ‌تر از یک نوشته شود، اول نیست؟ آری -

۲ــ با قاعده‌های بخش‌پذیری بر ۲، ۳، ۵ که در دبستان آموخته‌اید و یا روش‌های بالا، مشخص کنید کدام یک از عددهای طبیعی کمتر از ۳۰، اول هستند. دور آنها را خط بکشید. عددهایی را که اول نیستند، به‌صورت بالا با ضرب دو عدد غیر از یک نشان دهید

پاسخ باز است

۱	۲	۳	۴ = ۲×۲	۵	۶ = ۲×۳	۷	۸ = ۲×۴	۹ = ۳×۳	۱۰ = ۲×۵
۱۱	۱۲ = ۲×۶	۱۳	۱۴ = ۲×۷	۱۵	۱۶ = ۴×۴	۱۷	۱۸ = ۲×۹	۱۹	۲۰ = ۵×۴
۲۱ = ۳×۷	۲۲ = ۲×۱۱	۲۳	۲۴ = ۲×۱۲	۲۵ = ۵×۵	۲۶ = ۲×۱۳	۲۷ = ۳×۹	۲۸ = ۲×۱۴	۲۹	۳۰ = ۳×۱۰

۷۵

Donyaha.iR

۱ــ آیا عدد ۱۷ شمارندهٔ ۲۴۷ هست؟ چرا؟ خیر، چون عدد طبیعی وجود ندارد که در ۱۷ ضرب شود و حاصل ۲۴۷ شود

۲ــ آیا اگر عددی بر ۳ بخش‌پذیر بود، می‌توان گفت که ۳ شمارندهٔ آن است؟ بله

۳ــ ۴ عدد بنویسید که ۵ شمارندهٔ آنها باشد. ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵

۴ــ کدام یک از عددهای روبه‌رو بر ۱۵ بخش‌پذیر است؟ چرا؟ ۳۶۰ ، ۵۵۵ ، ۹۲۴ ، ۳۴۵

عددی بر ۱۵ بخش پذیر است که بر ۳ و ۵ بخش پذیر باشد

۵ــ تمام شمارنده‌های عددهای زیر را بنویسید.

۲۴ → ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۲۴

۱۸ → ۱, ۲, ۳, ۶, ۹, ۱۸

۲۰ → ۱, ۲, ۴, ۵, ۱۰, ۲۰

۳۰ → ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰

۴۰ → ۱, ۲, ۴, ۵, ۸, ۱۰, ۲۰, ۴۰

۶ــ جملات درست را با ✓ و جملات نادرست را با × مشخص کنید. دلیل نادرست بودن آن جمله را بنویسید.

✓ــ عدد ۲۹ اول است.

× ــ هر عدد حداقل ۲ شمارنده دارد. فقط دو شمارنده دارد / عدد یک فقط یک شمارنده دارد

× ــ تمام عددهای اول، فرد هستند؛ چون اگر زوج باشند، عدد ۲ شمارندهٔ آنها می‌شود. عدد ۲ زوج است ولی اول است

✓ــ اگر عددی غیر از خودش و یک شمارندهٔ دیگری داشت، حتماً اول نیست. چون بیش از دو شمارنده دارد

۷ــ در کلاس ۴ گروه ۳ نفره و ۶ گروه ۴ نفره وجود دارد. دانش‌آموزان این کلاس را در چند حالت می‌توان به گروه‌هایی با تعداد مساوی که تعداد نفرات هر گروه بین ۲ و ۷ نفرباشند، تقسیم کرد؟

۱۲ × ۳ = ۳۶ ۱۲ گروه سه نفره

۹ × ۴ = ۳۶ ۹ گروه چهار نفره

۶ × ۶ = ۳۶ ۶ گروه شش نفره

۲۴ + ۱۲ = ۳۶ نفر

۸ــ وقتی می‌نویسیم ۱۸=۶×۳، آیا می‌توان نتیجه گرفت که هم ۳ و هم ۶ شمارنده‌های ۱۸ هستند؟ چرا؟ بله - چون ۱۸ را می‌توان ۳ تا ۳ و یا ۶ تا ۶ تا شمارش کرد

آیا می‌توان نتیجه گرفت که همیشه تعداد شمارنده‌های یک عدد زوج است؟ خیر مثال ۹

۹ــ آیا حاصل ضرب دو عدد اول می‌تواند عددی اول باشد؟ چرا؟ خیر چون عدد حاصل را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو عدد بزرگ‌تر از یک نوشت

۱۰ــ هر عبارت را کامل کنید.

ــ مجموع دو عدد طبیعی فرد همیشه عددی زوج است.

ــ مجموع دو عدد طبیعی زوج همیشه عددی زوج است.

ــ مجموع یک عدد زوج و یک عدد فرد همیشه عددی فرد است.

پس از تکمیل کردن جمله‌های فوق (می‌توانید با حدس و آزمایش جمله‌ها را کامل کنید.) به سؤال زیر پاسخ دهید.

ــ آیا حاصل جمع دو عدد اول همواره یک عدد اول می‌باشد؟ خیر

۳ + ۵ = ۸

اول اول غیراول

Donyaha.iR

شمارندهٔ اول

فعالیت

۱ــ تمام شمارنده‌های عددهای زیر را بنویسید.

شمارنده‌های ۳۵ : ۱، ۵، ۷، ۳۵

شمارنده‌های ۹ : ۱، ۳، ۹

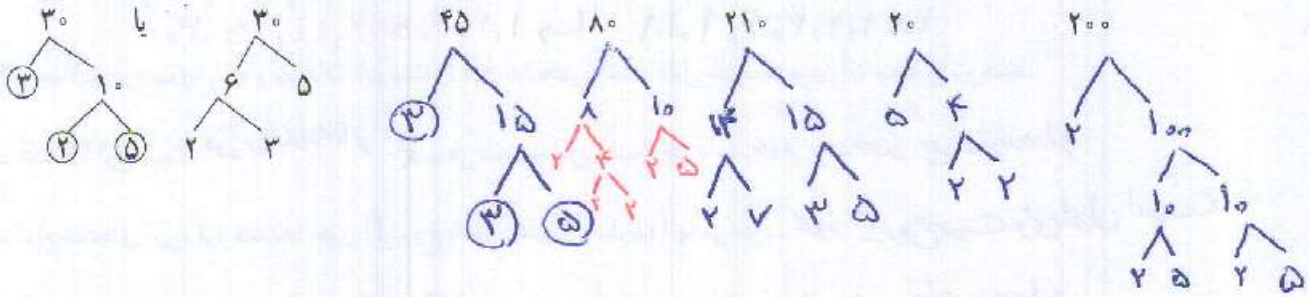
شمارنده‌های ۱۲ : ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲

شمارنده‌های ۱۴ : ۱، ۲، ۷، ۱۴

در هر قسمت، زیر شمارنده‌هایی که عدد اول هستند، خط بکشید.

شمارنده‌های اول ۳۵ چه عددهایی‌اند؟ ۵ و ۷ شمارندهٔ اول عدد ۹ چه عددی است؟ ۳

۲ــ مانند نمونه هر عدد را به‌صورت ضرب دو عدد بنویسید. این کار را آن قدر ادامه دهید تا به شمارنده‌های اول آن عدد برسید.



۳ــ با توجه به نمودارهای درختی بالا می‌توان عددها را به‌صورت ضرب عددهای اول نوشت:

$۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$ $۴۵ = ۳ \times ۳ \times ۵$ $۸۰ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۵$

$۲۱۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷$ $۲۰ = ۲ \times ۲ \times ۵$ $۱۰۰ = ۲ \times ۲ \times ۵ \times ۵$

شمارنده‌های اول عددهای اولی هستند که با استفاده از حاصل‌ضرب و تکرار آنها، می‌توان عددهای مختلفی را به‌دست آورد.

$۱۲ = ۳ \times ۲ \times ۲$

فعالیت

با شمارنده‌های اول (۲ و ۳) عددهای مختلف را با ضرب کردن بسازید. مانند نمونه‌ها بنویسید.

$۱۲ = ۳ \times ۲ \times ۲$ $۶ = ۳ \times ۲$ $۳ = ۳ \times ۱$ $۲ = ۲ \times ۱$

$۹ = ۳ \times ۳$ $۴ = ۲ \times ۲$ $۲۴ = ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ $۱۸ = ۳ \times ۳ \times ۲$

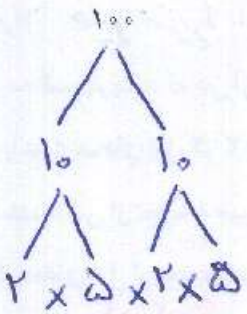
$۳۶ = ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲$ $۲۷ = ۳ \times ۳ \times ۳$ $۱۶ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ $۸ = ۲ \times ۲ \times ۲$

ویژگی عددهای به‌دست آمده این است که شمارنده‌های اول آنها عددهای ۲ و ۳ هستند.

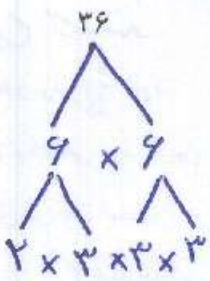
Donyaha.iR

فعالیت

شمارنده‌های اول عددهای زیر را با رسم نمودار درختی پیدا کنید و آنها را به‌صورت ضرب شمارندهٔ اول بنویسید.



$۱۰۰ = ۲ \times ۲ \times ۵ \times ۵$



$۳۶ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳$

$۸ = ۲ \times ۲ \times ۲$

فعالیت

۱ــ در دورهٔ دبستان آموختید که چگونه کسرها را ساده کنید. به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$\frac{۱۸}{۲۷} = \frac{۲ \times ۹}{۳ \times ۹} = \frac{۲}{۳} \qquad \frac{۴}{۶} = \frac{۲ \times ۲}{۲ \times ۳} = \frac{۲}{۳}$$

با تجزیه کردن، عددهای صورت و مخرج، کسرها را تا حد امکان ساده کنید. در واقع شمارنده‌های مشترک صورت و مخرج را ساده کنید.

$$\frac{۲۰}{۵۰} = \frac{۲ \times ۲ \times ۵}{۲ \times ۵ \times ۵} = \frac{۲}{۵} \qquad \frac{۲۸}{۴۲} = \frac{۲ \times ۲ \times ۷}{۲ \times ۳ \times ۷} = \frac{۲}{۳} \qquad \frac{۸۱}{۳۲} = \frac{۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳}{۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲} = \frac{۸۱}{۳۲}$$

۲ــ مساحت یک مستطیل که طول و عرض آن عددهای طبیعی‌اند ۱۸ شده است. تمام حالت‌هایی را که طول و عرض مستطیل می‌توانند داشته باشند، بنویسید.

$۱ \times ۱۸ = ۱۸$
$۲ \times ۹ = ۱۸$
$۳ \times ۹ = ۱۸$

طول و عرض این مستطیل چه ارتباطی با مساحت آن دارند؟ شمارنده‌های عدد ۱۸ می‌باشند

Donyaha.iR

$a = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$ $T(a) = 3 \times 2 \times 3 = 18$

$18 - 3 = 15$ شمارنده‌ی غیر اول

راه‌حل دوم ④

راه‌حل اول ۱، ۴، ۶، ۱۰ و ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۵۰، ۶۰، ۷۵ و ۱۰۰ و ۱۵۰، ۳۵۰ جواب

تمرین

۱ــ شمارنده‌های اول صورت یک کسر ۲ و ۳ هستند. شمارنده‌های اول مخرج آن کسر ۵ و ۷ هستند. آیا این کسر ساده می‌شود؟ چرا؟ خیر - زیرا از یک جنس نیستند

۲ــ سه کسر بنویسید که پس از ساده شدن برابر $\frac{3}{5}$ شود. $\frac{21}{35}$ ، $\frac{6}{10}$ ، $\frac{9}{15}$

۳ــ با شمارنده‌های اول ۲ و ۳ چند عدد تولید می‌شود که بین ۳۰ و ۵۰ باشد؟ ۳۲، ۳۶، ۴۸

۴ــ عدد a پس از تجزیه به صورت مقابل در آمده است. $a = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

شمارنده‌های اول آن چه عددهایی‌اند؟ ۴ شمارندهٔ این عدد را بنویسید که اول نباشد. ۱، ۲، ۴، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ...

۵ــ عدد b پس از تجزیه به صورت مقابل درآمده است. $b = 4 \times 3 \times 15 \times 6$

شمارنده‌های اول آن چه عددهایی هستند؟ ۲، ۳ و ۵ $b = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$

۶ــ عددهای زیر را با رسم نمودار درختی تجزیه کرده و شمارنده‌های اول آنها را مشخص کنید.

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ $297 = 3 \times 3 \times 3 \times 11$ $104 = 2 \times 2 \times 2 \times 13$

۷ــ عددهای ۷ و ۵ و ۱۳ اول هستند. شمارنده‌های اول آنها را بنویسید. براساس آن تعریف دیگری برای عددهای اول ارائه کنید. ۷، ۵، ۱۳ اعداد اول اعدادی هستند که شمارنده‌ی اول آن‌ها خودشان باشند

۸ــ جملات درست را با ✓ و نادرست را با × مشخص کنید. دلیل نادرستی را توضیح دهید.

✗ الف) تمام عددها شمارندهٔ اول دارند. عدد یک شمارنده‌ی اول ندارد

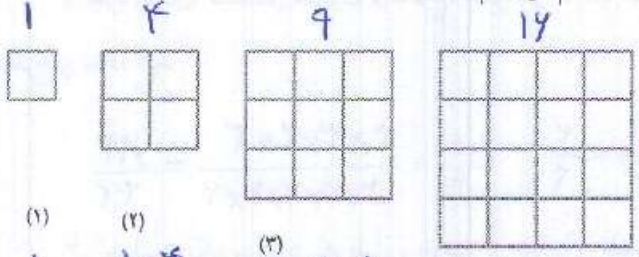
✓ ب) اگر عددی زوج باشد یکی از شمارنده‌های اولش ۲ است.

✗ ج) هیچ عددی پیدا نمی‌شود که ۵ شمارندهٔ اول داشته باشد. $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$

✓ د) تعداد عددهای اول بی‌پایان‌اند.

Dorsahs.iR

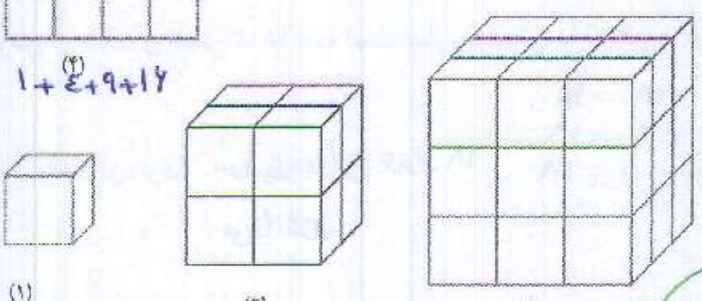
۹ــ الگوهای شکل‌ها را به الگوهای عددی تبدیل کنید. جملهٔ nام هر کدام را بنویسید.



(۱) ۱ (۲) ۱+۴ (۳) ۱+۴+۹ (۴) ۱+۴+۹+۱۶

جملهٔ nام $= n \times n$ رابطه‌ی اول

جملهٔ nام (حاصل مربع‌ها) $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ رابطه‌ی دوم



(۱) ۱ (۲) ۸ (۳) ۲۷

۷۹

تعداد کل مکعب‌ها $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ رابطه‌ی دوم

جملهٔ nام $= n^3$ رابطه‌ی اول

بزرگ‌ترین شمارنده مشترک

فعالیت

۱ــ قرار است دانش‌آموزان سال اول یک مدرسه به اردو بروند. آنها می‌خواهند در اردو چادر بزنند. تعداد افراد چادرها باید مساوی باشند. کلاس اول الف ۳۰ دانش آموز دارد. در این کلاس از چادرهای چند نفره می‌توان استفاده کرد؟ چرا؟

شمارنده‌های ۳۰ : ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰

چون این اعداد ۳۰ را می‌شمارند و باقیمانده‌ی تقسیم عدد ۳۰ برآنها برابر صفر است و چادرها به صورت مساوی پر می‌شود

کلاس اول ب، ۳۶ دانش‌آموز دارد. برای این کلاس چه چادرهایی می‌توان بر پا کرد؟ چرا؟

شمارنده‌های ۳۶ : ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲, ۱۸, ۳۶

زیرا در تقسیم ۳۶ بر این اعداد باقیمانده صفر می‌شود و چادرها به صورت مساوی پر می‌شود

اگر قرار باشد یک نوع چادر، برای هر دو کلاس تهیه کنیم، چادرهای چند نفره مناسب است؟ چرا؟

۱, ۲, ۳, ۶

چون در تقسیم ۳۶ و ۳۰ بر این اعداد باقیمانده صفر می‌شود و چادرها به صورت مساوی پر می‌شود

اگر قرار باشد از چادر مشترک برای دو کلاس استفاده شود و تعداد دانش آموزان یک چادر بیشترین تعداد باشد تا چادر کمتری تهیه شود، چادر چند نفره مناسب است؟

۶ نفره

۲ــ دو عدد ۲۴ و ۱۸ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک دو عدد را پیدا کنیم.

امید از روش زیر استفاده کرد :

شمارنده‌های مشترک دو عدد = $\{1, 2, 3, 6\}$ تمام شمارنده‌های ۱۸ : $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک دو عدد = ۶ تمام شمارنده‌های ۲۴ : $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

احمد از روش زیر استفاده کرد. او ابتدا عددها را به‌صورت ضرب شمارنده‌های اول نوشت.

$۱۸ = ۲ \times ۳ \times ۳$

$۲۴ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳$

$\Longrightarrow$ ضرب مشترک $۲ \times ۳ = ۶$

سپس حاصل‌ضرب قسمت‌های مشترک آنها را مشخص کرد تا بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک مشخص شود.

تعریف مقسوم علیه

شمارنده‌های یک عدد را مقسوم‌علیه‌های آن نیز می‌گویند بنابراین بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک دو عدد همان بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است که به اختصار آن را ب.م.م می‌نویسند. ب.م.م دو عدد را به صورت (ر) نشان می‌دهند. مانند:

(۱۸ و ۲۴) ب.م.م = ۶

آیا می‌توانید بگویید در فعالیت بالا احمد از چه روشی استفاده کرده است؟

از ضرب عامل های مشترک ۱۸ و ۲۴ استفاده کرده

Donyaha.iR

شمارنده‌های ۱۲: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲

شمارنده‌های ۱۴: ۱، ۲، ۷، ۱۴

شمارنده‌های مشترک ۱۲ و ۱۴: ۱، ۲

$(12,14)=2$

شمارنده‌های ۲۰: ۱، ۲، ۴، ۵، ۱۰، ۲۰

شمارنده‌های ۳۰: ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵، ۳۰

شمارنده‌های مشترک ۲۰ و ۳۰: ۱، ۲، ۵، ۱۰

$(20,30)=10$

تمرین

۱ــ با نوشتن تمام شمارنده‌های دو عدد ب.م.م آنها را پیدا کنید.

$12=2\times2\times3$

$14=2\times7$

$(12\text{ و }14)=2$

$20=2\times2\times5$

$30=2\times3\times5$

$(20\text{ و }30)=2\times5=10$

۲ــ با تجزیهٔ عددها به شمارنده‌های اول ب.م.م دو عدد را پیدا کنید.

$48=2\times2\times2\times2\times3$

$36=2\times2\times3\times3$

$(36\text{ و }48)=2\times2\times3=12$

$42=2\times3\times7$

$30=2\times3\times5$

$(30\text{ و }42)=2\times3=6$

تمرین

۱ــ می‌خواهیم مستطیلی به طول ۱۶ و عرض ۱۲ سانتی‌متر را با کاشی‌های مربعی پر کنیم.

ضلع این کاشی مربعی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ چرا؟ ۴، ۲، ۱ چون بدون شکستن کاشی‌ها می‌توانیم این مستطیل را کاشی بچسبانیم، این اعداد شمارنده‌ی مشترک ۱۲ و ۱۶ هستند

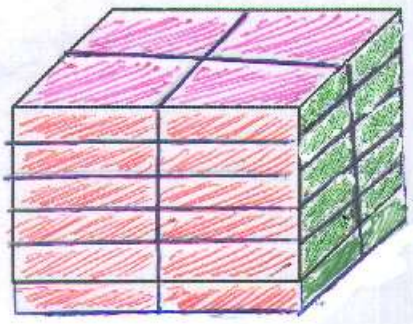
اگر بخواهیم کاشی‌های مصرف شده کمترین تعداد باشد (ضلع کاشی باید بزرگ باشد)، چه عددی برای ضلع کاشی مناسب است؟ چرا؟ ۴ ، زیرا کاشی به ضلع ۴ بزرگ‌ترین شمارنده‌ی مشترک این دو عدد می‌باشد

اگر بخواهیم کاشی‌های مصرف شده بیشترین تعداد باشد (ضلع کاشی کوچک‌ترین عدد باشد) چه عددی برای ضلع کاشی مناسب است؟ چرا؟ ۱ چون ضلع کوچک‌ترین کاشی بدون شکستن این مستطیل را پر می‌کند کاشی به ضلع ۱ می‌باشد

۲ــ در فصل قبل به این مسئله جواب دادید.

یک جعبه دستمال به شکل مکعب مستطیل داریم که طول آن ۲۵، عرض آن ۱۲ و ارتفاعش ۵ سانتی‌متر است. تعیین کنید چند عدد از این جعبه‌ها در یک کارتن مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰، ۲۴ و ۳۰ سانتی‌متر جا می‌گیرد؟

در این مسئله ابعاد کارتن چه ارتباطی با ابعاد جعبهٔ دستمال دارند. با توجه به این ارتباط شکل زیر را کامل کنید تا مشخص شود چند جعبه در این کارتن جا گرفته است؟



راهبرد رسم شکل

۲۵ عدد ۵۰ را می‌شمارد

۱۲ عدد ۲۴ را می‌شمارد

۵ عدد ۳۰ را می‌شمارد

$6\times2\times2=24$

جعبه‌ی دستمال کاغذی

Donyaha.iR

عددهای زیر تجزیه شده‌اند، ب.م.م‌های خواسته شده را به‌دست آورید.

$۲۸ = ۲\times۲\times۷$ $\quad$ $۱۲ = ۲\times۲\times۳$ $\quad$ $۳۶ = ۲\times۲\times۳\times۳$

$(۱۲ \text{ و } ۲۸) = ۲\times۲ = ۴$ $\quad$ $(۳۶ \text{ و } ۲۸) = ۲\times۲ = ۴$ $\quad$ $(۳۶ \text{ و } ۱۲) = ۲\times۲\times۳ = ۱۲$ $\quad$ $(۲۸ \text{ و } ۳۶ \text{ و } ۱۲) = ۲\times۲ = ۴$

چرا نتیجه‌ای می‌گیرید

۱ــ دو ظرف به گنجایش ۱۲ و ۱۸ لیتر داریم. می‌خواهیم با یک پیمانه که هر بار پر و خالی می‌شود، دو ظرف را به طور کامل پر کنیم. کدام پیمانه‌ها برای این کار مناسب است؟ بزرگ‌ترین پیمانه کدام است؟

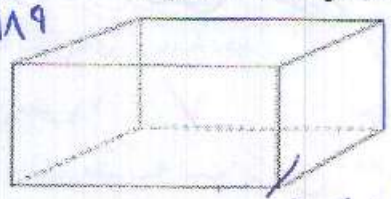
$۱۸ = ۲\times۳\times۳$

$۱۲ = ۲\times۲\times۳$

$\Rightarrow ۲\times۳ = ۶$ شمارنده‌های ۶: ۱، ۲، ۳، ۶

شمارنده‌های ۶ پیمانه‌های مناسب برای این کار است

۲ــ یک مکعب مستطیل به ابعاد ۱۲ و ۳۶ و ۲۸ سانتی‌متر را با مکعب‌های مساوی پر کرده‌ایم. بزرگ‌ترین ضلع این مکعب چه عددی است؟ در این صورت چند مکعب در این مکعب مستطیل جا می‌شود؟



$۱۲ = ۲\times۲\times۳$

$۳۶ = ۲\times۲\times۳\times۳$

$۲۸ = ۲\times۲\times۷$

$\Rightarrow ۲\times۲ = ۴$ ب.م.م

$\frac{۲۸\times۳۶\times۱۲}{۴\times۴\times۴} = ۱۸۹$ تعداد مکعب‌ها

۳ــ برای درستی جملات زیر دلیل بیاورید.

✓ اگر دو عدد b و a اول باشند، ب.م.م آنها عدد یک می‌شود. $(a \text{ و } b) = ۱$ تنها شمارنده‌ی مشترک اعداد اول، عدد یک است

✓ اگر عددی بر عدد دیگر هم بخش‌پذیر باشند، عدد کوچک‌تر ب.م.م دو عدد است. چون عدد کوچکتر عدد بزرگتر را می‌شمارد

✓ کوچک‌ترین مضروب مشترک (یا شمارنده‌ی مشترک) هر دو عدد ۱ است

۴ــ ابتدا عددهای صورت و مخرج را تجزیه کنید سپس کسرها را ساده کنید.

$\frac{۹۶}{۱۴۴} = \frac{۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۳}{۲\times۲\times۲\times۲\times۳\times۳} = \frac{۲}{۳}$ $\quad$ $\frac{۳۵}{۲۴۵} = \frac{۵\times۷}{۵\times۷\times۷} = \frac{۱}{۷}$

۵ــ ب.م.م عددهای زیر را محاسبه کنید.

$(۵۵ \text{ و } ۱۲۱) = ۱۱$ $\quad$ $(۱۰۸ \text{ و } ۲۱۶) = ۱۰۸$ $\quad$ $(۹۱ \text{ و } ۱۱۷) = ۱۳$

$۱۲۱ = ۱۱\times۱۱$

$۵۵ = ۵\times۱۱$

$۲۱۶ = ۲\times۲\times۲\times۳\times۳\times۳$

$۱۰۸ = ۲\times۲\times۳\times۳\times۳$

$۹۱ = ۱۳\times۷$

$۱۱۷ = ۱۳\times۹$

۶ــ برای جملات درست زیر ۲ مثال بزنید.

● $(n \text{ و } n) = n$ $\quad$ $(۲,۲) = ۲$, $(۶,۶) = ۶$

● ب.م.م دو عدد a و b شمارندهٔ دو عدد a و b است.

● اگر عدد a اول باشند، ب.م.م a و عدد دیگر مثل b یا یک می‌شود یا خود a.

$(۵, ۱۴) = ۱$

$(۵, ۱۵) = ۵$

Donyaha.iR

کوچک‌ترین مضرب مشترک

تمرین

۱ــ مضرب‌های صحیح یک عدد از ضرب آن در عددهای صحیح به‌دست می‌آید. مضرب‌های صحیح ۳ را کامل کنید.

... و ــــ و ــــ و ــــ و ۱×۳ و ۰×۳ و (۱-)×۳ و ــــ و ــــ و ــــ و ــــ و ...

... و ــــ و ۱۲ و ۹ و ۶ و ۳ و ۰ و ۳- و ۶- و ۹- و ــــ و ــــ و ...

۲ــ مضرب‌های طبیعی یک عدد از ضرب آن در عددهای طبیعی به‌دست می‌آید. مضرب‌های طبیعی را به اختصار مضرب می‌گوییم. مضرب‌های عددهای زیر را بنویسید.

... و ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ : مضرب‌های ۲

۷, ۱۴, ۲۱, ... : مضرب‌های ۷

۵, ۱۰, ۱۵, ... : مضرب‌های ۵

در این نحوهٔ نوشتن علامت ... به چه معناست؟ یعنی مضرب‌ها ادامه دارد

تمرین

۱ــ به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

اولین مضرب ۷ : ۷ سومین مضرب ۶ : ۱۸ دهمین مضرب ۹ : ۹۰

۸۰ چندمین مضرب ۸ است؟ دهمین ۲۴ چندمین مضرب ۶ است؟ چهارمین

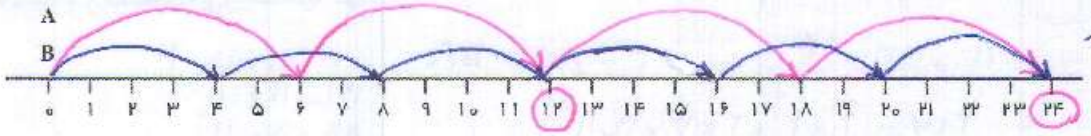
۳۶ چندمین مضرب ۲ است؟ هجدهمین ۱۴۴ چندمین مضرب ۶ است؟ بیست و چهارمین

۲ــ آیا تعداد شمارنده‌های یک عدد محدود است؟ بله

تعداد مضرب‌های یک عدد چطور؟ خیر

فعالیت

در یک بازی رایانه‌ای مهرهٔ A، ۶ تا ۶ تا حرکت می‌کند و مهرهٔ B، ۴ تا ۴ تا حرکت می‌کند. در شروع بازی هر دو مهره روی عدد صفرند. در کدام عدد این دو مهره دوباره کنار هم قرار می‌گیرند؟ دوازده - (مسافت طی شده توسط دو مهره مساوی است)



مضارب مشترک : ۱۲, ۲۴, ۳۶, ...

مضارب ۶ : ۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ...

کوچک‌ترین مضرب مشترک : ۱۲

مضارب ۴ : ۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰, ۲۴, ...

Donyaha.iR

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد اولین مضرب مشترک آن دو عدد است. مضرب‌های مشترک بعدی را با داشتن اولین مضرب مشترک می‌توان پیدا کرد. کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد را به‌طور اختصار ک.م.م می‌گویند و به صورت [و] نمایش می‌دهند.

به‌عنوان نمونه $[۶ \text{ و } ۴] = ۱۲$

فعالیت

۱ــ ک.م.م دو عدد ۱۲ و ۱۸ را پیدا کنید.

مضارب ۱۸ : ۱۸، ۳۶، ۵۴، ...

مضارب ۱۲ : ۱۲، ۲۴، ۳۶، ...

مضارب مشترک ۱۸ و ۱۲ : ۳۶، ۷۲، ۱۰۸، ... $[۱۸ \text{ و } ۱۲] = ۳۶$

۲ــ عددهای ۱۸ و ۱۲ به‌صورت تجزیه شده، نوشته شده‌اند.

$۱۸ = ۲ \times ۳ \times ۳$ $\quad ۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$ $\quad [۱۸ \text{ و } ۱۲] = ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۳ = ۳۶$

(مشترک، مشترک)

با توجه به پاسخ بالا چه رابطه‌ای بین شمارنده‌های اول دو عدد و ک.م.م آنها می بینید؟ توضیح دهید.

(حاصل ضرب مشترک‌ها و غیر مشترک‌ها)

می‌توانید از مثال زیر هم استفاده کنید.

$A = ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۵$ $\quad B = ۲ \times ۵ \times ۳ \times ۳$ $\quad [A \text{ و } B] = ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۲ \times ۵$

$B = ۲ \times ۵ \times ۳ \times ۳$

$\frac{۳ \times ۳ \times ۵ \times ۵ \times ۲}{A}$ ، $\frac{۲ \times ۵ \times ۳ \times ۳ \times ۵}{B}$

فعالیت

۱ــ تساوی $۶ \times ۴ = ۲۴$ را به‌صورت‌های مختلف می‌توان معنی کرد، جاهای خالی را کامل کنید.

۴ شمارندهٔ ۲۴ است. ششمین مضرب عدد ۲۴ است.

۶ شمارندهٔ ۲۴ است. چهارمین مضرب ۶ عدد ۲۴ است.

عددهای ۴ و ۶ شمارندهٔ ۲۴ است. عدد ۲۴ بر ۴ و ۶ قابل قسمت است.

۲ــ یکی از مهم‌ترین کاربردهای ک.م.م در پیدا کردن مخرج مشترک دو کسر است. یعنی کوچک‌ترین عددی را پیدا می‌کنیم که به هر دو مخرج بخش‌پذیر (قابل‌قسمت) باشد. مانند نمونه حاصل جمع‌ها و تفریق‌ها را با کمک ک.م.م مخرج‌ها به‌دست آورید.

$\frac{۵}{۶} + \frac{۴}{۹} = \frac{۱۵}{۱۸} + \frac{۸}{۱۸} = \frac{۲۳}{۱۸}$ $\quad [۶ \text{ و } ۹] = ۱۸$

$\frac{۷}{۱۵} + \frac{۹}{۲۰} = \frac{۲۸}{۶۰} + \frac{۲۷}{۶۰} = \frac{۵۵}{۶۰}$ $\quad [۱۵ \text{ و } ۲۰] = ۶۰$

$\frac{۱۵}{۱۲} - \frac{۷}{۱۸} = \frac{۴۵}{۳۶} - \frac{۱۴}{۳۶} = \frac{۳۱}{۳۶}$ $\quad [۱۲ \text{ و } ۱۸] = ۳۶$

Donyaha.iR

۱ـ هر ۲۰ دقیقه یک اتوبوس خط A از ترمینال حرکت می‌کند.

اتوبوس‌های خط B هر ۳۰ دقیقه از ترمینال حرکت می‌کند. ساعت ۱۲ ظهر دو اتوبوس در خط‌های A و B همزمان حرکت کرده‌اند. در چه ساعتی به‌طور هم‌زمان اتوبوس‌ها از این دو خط حرکت می‌کنند؟ ۶۰ دقیقه بعد

[۲۰, ۳۰] = ۶۰ یعنی ساعت ۱۳

مضرب‌های عدد ۲۰ : ۲۰, ۴۰, ۶۰, ۸۰, ۱۰۰, ...

مضرب‌های عدد ۳۰ : ۳۰, ۶۰, ۹۰, ۱۰۰, ...

۲ـ یک پیست دومیدانی در یک مجتمع فرهنگی ورزشی قرار دارد.

امید و فرامرز از یک نقطه شروع به دویدن می‌کنند. اگر امید هر ۳۵ دقیقه یک دور کامل پیست را طی کند و فرامرز هر ۲۱دقیقه یک دور کامل طی کند، پس از چند دقیقه فرامرز و امید با هم به همان نقطهٔ شروع می‌رسند؟ در این صورت هر کدام چند دور دویده‌اند؟

مضرب‌های ۳۵ : ۳۵, ۷۰, ۱۰۵, ۱۴۰, ۱۷۵, ...

۲۱ ~ : ۲۱, ۴۲, ۶۳, ۸۴, ۱۰۵

[۳۵, ۲۱] = ۱۰۵

۳ـ آیا ۲۱۰ مضرب مشترک ۷ و ۳۰ است؟ چرا؟ بله ، باقیمانده‌ی تقسیم ۲۱۰ بر ۷ و ۳۰ برابر صفر می‌شود

آیا ۴۲۰ مضرب مشترک ۷ و ۳۰ است؟ چرا؟ بله ، باقیمانده‌ی تقسیم ۴۲۰ بر آن‌ها برابر صفر است

دو عدد ۷ و ۳۰ چند مضرب مشترک دارند؟ بی‌شمار

۴ـ دلیل درستی جملات زیر را بیان کنید.

کلای

☑ اگر عددی بر عدد دیگر بخش‌پذیر باشند، عدد بزرگ‌تر ک.م.م دو عدد است. باقیمانده‌ی تقسیم عدد بزرگ‌تر بر هر دو عدد صفر است

[۱۸, ۶] = ۱۸

☑ اگر ب.م.م دو عدد یک باشد، ک.م.م دو عدد برابر حاصل ضرب دو عدد است.

(۹, ۱۰) = ۱ ⇒ [۹, ۱۰] = ۹۰

(۵, ۷) = ۱ ⇒ [۵, ۷] = ۳۵

☑ ک.م.م دو عدد اول برابر حاصل ضرب آنهاست.

۵ـ برای هر کدام از جملات درستِ زیر یک مثال بزنید.

☑ n = [n و ۱] [۱۰, ۱] = ۱۰

☑ n = [n و n] [۱۰, ۱۰] = ۱۰

☑ ب.م.م دو عدد شمارندهٔ ک.م.م دو عدد است. ۴ شمارنده‌ی ۲۴ می‌باشد

(۱۲, ۸) = ۴ , [۱۲, ۸] = ۲۴

☑ حاصل‌ضرب دو عدد برابر حاصل ضرب ک.م.م و ب.م.م دو عدد است.

۱۲ × ۸ = ۴ × ۲۴

۹۶ = ۹۶

۶ـ به‌صورت ذهنی تساوی‌ها را کامل کنید.

[۴ و ۱۲] = ۱۲	(۳ و ۱۵) = ۳	(۵ و ۷) = ۱	(۲۰ و ۳۰) = ۱۰
(۹ و ۴) = ۱	[۱۵ و ۳۰] = ۳۰	(۱۹ و ۳۸) = ۱۹	[۳۰ و ۵۰] = ۱۵۰
[۶ و ۴] = ۱۲	(۷ و ۲ و ۳) = ۱	[۳ و ۲ و ۷] = ۴۲	[۹ و ۴] = ۳۶

Donyaha.iR

۶ مرور فصل

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به‌کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید و برای هر کدام یک مثال بزنید.

□ عدداول □ شمارندهٔ (مقسوم علیه) یک عدد □ شمارندهٔ اول □ مضرب □ ب.م.م □ ک.م.م

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

□ نوشتن شمارنده‌های یک عدد
□ پیدا کردن عددهای اول
□ پیدا کردن شمارنده اول یک عدد
□ ساختن عددهای مختلف با شمارنده‌های اول
□ پیدا کردن تمام شمارنده‌های یک عدد با معلوم بودن تجزیهٔ عدد
□ تجزیهٔ عددبه شمارنده‌های اول
□ پیدا کردن ب.م.م دو عدد
□ نوشتن مضرب‌های یک عدد
□ پیدا کردن ک.م.م دو عدد
□ رابطهٔ بین مضرب و مقسوم علیه

کاربرد

از مفاهیم ب.م.م و ک.م.م در محاسبات کسری (ساده کردن و مخرج مشترک) استفاده می‌کنیم. درک شمارنده‌های اول یک عدد زمینه‌ساز همین بحث به‌صورت جبری است.

Donyaha.iR

تمرین‌های ترکیبی

در صورتی‌که تمرین‌های زیر را بتوانید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به‌خوبی آموخته‌اید.

۱ـ با توجه به تساوی ۱۲=۴×۳ معانی مختلف آن را بیان کنید. ۴و۳ شمارنده‌های ۱۲ می‌باشند، ۱۲ مضرب ۳ و ۴ هست

۲ـ ابتدا دو عدد زیر را به شمارنده‌های اول تجزیه کنید، سپس ب.م.م و ک.م.م آنها را به دست آورید.

$۷۲ = ۲\times۲\times۲\times۳\times۳$ $۶۰ = ۲\times۲\times۳\times۵$ $(۷۲,۶۰) = ۲\times۲\times۳ = ۱۲$

$[۷۲,۶۰) = ۲\times۲\times۲\times۳\times۳\times۵$

۳ـ عددهای اول بین ۵۰ تا ۸۰ را بنویسید.

با استفاده از تجزیه

۵۳, ۵۹, ۶۱, ۶۷, ۷۱, ۷۳, ۷۹

۴ـ با شمارنده‌های اول ۲ و ۳ دو عدد بنویسید که ب.م.م آنها ۶ و ک.م.م آنها ۳۶ باشد.

راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

$(۱۸,۱۲)=۶$, $[۱۸,۱۲]=۳۶$

$(۶,۳۶)=۶$, $[۶,۳۶]=۳۶$